



Lærum stærðfræði til skilnings með hjálp GeoGebra

Greinagerð með GeoGebra námsefni

Grímur Bjarnason

Lokaverkefni til B.Ed.-prófs

Kennaradeild



HÁSKÓLI ÍSLANDS
MENNTAVÍSINDASVIÐ

Lærum stærðfræði til skilnings með hjálp GeoGebra

Greinagerð með GeoGebra námsefni

Grímur Bjarnason

Lokaverkefni til B.Ed. prófs í Grunnskólakennarafræði

Leiðbeinandi: Freyja Hreinsdóttir

Kennaradeild
Menntavísindasvið Háskóla Íslands
Febrúar 2015

Lærum stærðfræði til skilnings með hjálp GeoGebra, greinagerð með
GeoGebra námsefni

Ritgerð þessi er 10 eininga lokaverkefni til B.Ed.-prófs
í Grunnskólakennarafræði við Kennaradeild,
Menntavísindasviði Háskóla Íslands

© Grímur Bjarnason 2015

Óheimilt að afrita ritgerðina á nokkurn hátt nema með leyfi höfundar.

Prentun: Bóksala kennaranema
Reykjavík, 2015

Ágrip

Áherslur í stærðfræðikennslu hafa verið að breytast í Aðalnámskrá grunnskóla á síðustu áratugum. Sú þróun hefur kallað á nýtt námsefni sem samrýmist breyttum áherslum. Þessari þörf hefur að einhverju leyti verið mætt með námsefninu Átta-tíu en þó er að mati höfundar vöntun á frekari fjölbreytni. Tilgangurinn með þessu lokaverkefni er því að hanna námsefni í stærðfræði fyrir unglingastig grunnskóla sem mætir þessum breyttu áherslum og gefur kennurum kost á fjölbreyttari valmöguleikum. Í námsefninu er lögð áhersla á notkun forritsins GeoGebra enda samrýmist það áherslum Aðalnámskrár grunnskóla um notkun tölvutækninnar. Verkefnaheftið samanstendur af níu sjálfstæðum verkefnum. Viðfangsefni þeirra spanna m.a. rúmfræði, algebru og fjármál og eru verkefnin hugsuð fyrir nemendur á unglingastigi. Með þeim eiga kennara að geta boðið upp á tilbreytingu frá hefðbundnu námsefni og aukið fjölbreytnina í kennslu sinni á stærðfræði. Lokaverkefni þetta samanstendur af greinagerð, verkefnahefti og kennsluleiðbeiningum.

Efnisyfirlit

Ágrip	3
Formáli	5
1 Inngangur	6
2 Áhersla á notkun tölvutækninnar	7
3 Um forritið GeoGebra	8
3.1 Hvað er GeoGebra	8
3.2 Uppruni Geogebra	8
3.3 Kostir GeoGebra	9
3.4 Að byrja að nota GeoGebra við kennslu.....	10
4 Tildrög, markmið og gagnsemi lokaverkefnis	11
5 Verkefnahefti	12
5.1 Lýsing á verkefnum og markmiðum þeirra	12
5.1.1 Verkefni 1 Að fá tilfinningu fyrir rúmfræðilegum færslum	12
5.1.2 Verkefni 2 Ummál og flatarmál rétthyrnings	12
5.1.3 Verkefni 3 Sívalningur og kúla	13
5.1.4 Verkefni 4 Jafna beinnar línu.....	13
5.1.5 Verkefni 5 Annars stigs jöfnur	14
5.1.6 Verkefni 6 Pýþagóras.....	14
5.1.7 Verkefni 7 Bifreiðakaup	14
5.1.8 Verkefni 8 Val á farsímaáskrift	15
5.1.9 Verkefni 9 Samanburður á tímakaupi og jafnaðarkaupi	15
5.2 Notkun verkefnaheftis.....	16
6 Kennsluleiðbeiningar	17
7 Lokaorð	18
Heimildaskrá	19

Formáli

Eftir því sem liðið hefur á háskólanám mitt hefur stærðfræðin sem ég hef þurft að glíma við verið að þyngjast. Það er að stórum hluta sökum þess að erfitt er að hlutbinda eða sjá fyrir sér þau stærðfræðilegu viðfangsefni sem unnið er með. Mér hefur reynst það mikil hjálp að einn kennara minna hún Freyja Hreinsdóttir, sem jafnframt er leiðsögukennari minn í þessu verkefni, hefur lagt sig fram við að varpa ljósi á stærðfræðileg viðfangsefni með notkun forritsins GeoGebra. Á þriðja ári í kennaranámi sat ég hjá henni námskeið sem bar heitið Námssefnisgerð í GeoGebra. Segja má að hugmyndin að þessu lokaverkefni hafi fæðst strax á fyrsta degi þess námskeiðs auk þess sem ég sá fyrir mér að ég gæti að einhverju leyti samtvinnuð vinnuna úr því námskeiði með gerð lokaverkefnisins. Verkefnaheftið sem eru afrakstur þessa lokaverkefnis er ætlað fyrir unglिंगadeild grunnskóla. Það er von mín að verkefnið geti nýst við kennslu. Að það geti auðveldað kennurum að brjóta upp hefðbundna kennslu og geri nemendum kleyft að skapa sjónrænar tengingar við stærðfræðileg viðfangsefni. Ég vil þakka fjölskyldu minni fyrir alla þá aðstoð sem þau veittu mér í gegnum verkefnaskrifin auk þess sem ég vil þakka leiðsögukennara mínum Freyju Hreinsdóttur fyrir góðar ábendingar, leiðsögn og að hafa kynnti mig fyrir GeoGebra.

Þetta lokaverkefni er samið af mér undirrituðum. Ég hef kynnt mér *Síðareglur Háskóla Íslands* (2003, 7. nóvember, <http://www.hi.is/is/skolinn/sidareglur>) og fylgt þeim samkvæmt bestu vitund. Ég vísa til alls efnis sem ég hef sótt til annarra eða fyrri eigin verka, hvort sem um er að ræða ábendingar, myndir, efni eða orðalag. Ég þakka öllum sem lagt hafa mér lið með einum eða öðrum hætti en ber sjálfur ábyrgð á því sem missagt kann að vera. Þetta staðfesti ég með undirskrift minni.

Gautaborg, _____ 20____

1 Inngangur

Á síðustu þremur til fjórum áratugum hafa áherslurnar í stærðfræðihluta Aðalnámskrá grunnskóla breyst töluvert. Áður fyrr var meiri áhersla á beinan reikning og endurtekningaræfingar. Auk þess sem nemendur glímdu við stærðfræðina á einstaklings forsendum. Nú orðið er aftur á móti meira áhersla lögð á að nemendur vinni stærðfræðiverkefni í samvinnu við aðra og að viðfangsefnin sé að öðrum toga. T.d. rannsóknartengd stærðfræðiverkefni, þrautarlausnir og verkefni sem fela í sér tengsl við daglegt líf. Hugmyndin er að skapa nemendum tækifæri til þess að byggja upp stærðfræðipækkingu sína, að fá þá til þess að ígrunda, þjálfast í notkun röksemdarfærslu og að þeir læri stærðfræði til skilnings.

Til þess að geta mætt þessum nýju áherslum hefur þurft nýtt námsefni í stærðfræði. Á árunum 2005-2008 gáfu Guðný Helga Gunnarsdóttir og Guðbjörg Pálsdóttir út nýtt kjarnanámsefni í stærðfræði fyrir unglíngastig grunnskóla. Þetta voru bækur sem voru sérstaklega samdar með áherslur Aðalnámskrár grunnskóla í huga (Guðný Helga Gunnarsdóttir og Guðbjörg Pálsdóttir, 2010, bls. 542-543). Það verður þó seint sagt að það sé offramboð af íslensku námsefni í stærðfræði fyrir unglíngastignemendur. Það er t.d. ekki um auðugan garð að gresja þegar kemur að ítarefni í stærðfræði sem samið er sérstaklega með áherslur Aðalnámskrár í huga og byggir á notkun nemenda á tölvutækni við lausn verkefna. Það hefur þá eðlilegu skýringu að markaðurinn er mjög lítill þar sem einungis eru um 4300 nemendur í árgangi. Því starfa fáir eða jafnvel engir við það að búa til íslenskt námsefni í fullu starfi. Það námsefni sem er framleitt á Íslandi er því oftast samið af starfandi kennurum í hjáverkum.

Ég hef ákveðið að láti mig þetta mál varða og í þessu lokaverkefni samið verkefnahefti með GeoGebra verkefnum sem samrýmast vel breyttum áherslum Aðalnámskrárinnar. Mikið er um verkefni sem fela í sér tengsl við daglegt líf, verkefni sem gefa nemendum tækifæri til ígrundunar, fela í sér hópavínu og þjálfna nemendur í að rökstyðja lausnarleiðir sínar og niðurstöður. Þá er það aðalmarkmið mitt með þessum verkefnum að auka fjölbreytnina á íslensku stærðfræðinámsefni fyrir unglíngastig og skapa sem flestum nemendum tækifæri að læra stærðfræði til skilnings á eigin forsendum.

2 Áhersla á notkun tölvutækninnar

Þróunin hefur verið hröð á sviði upplýsingatækninnar á undanförunum 15-20 árum. Þessi þróun hefur breytt því umhverfi sem við lifum í og störfum. Í dag teljast tölvur og stafræn samskiptatæki víða ómissandi þáttur í daglegu lífi fólks. Þetta á ekki bara við á vinnumarkaðinum og á heimilum því þessi tæki eru einnig orðin mikilvæg og sjálfsögð verkfæri í almennu skólastarfi. Möguleikar tölvunnar einskorðast ekki við ritvinnslu- og reikniverkfæri hennar, heldur þarf að hafa í huga að tölvur eru tæki sem nota má til fjölbættrar merkingarsköpunar eins og t.d. myndrænnar framsetningar. Nemendur og kennara eru því ekki lengur bundnir við prentað mál þar sem tölvutæknin býður þeim upp á fjölbreyttan framsetningarmáta við nám og kennslu (Mennta- og menningarmálaráðuneytið, 2013, bls. 19).

Í Aðalnámskrá grunnskóla er fjallað sérstaklega um mikilvægi tölvutækninnar í stærðfræðinámi. Þar er í umfjöllun um kennsluhætti meðal annars talað um nauðsyn þess að nemendur fái að kynnast og nota fjölbreytt verkfæri í þeim tilgangi að þau hjálpi nemendum að öðlast skilning á vinnubrögðum, hugtökum og reglum stærðfræðinnar (Mennta- og menningarmálaráðuneytið, 2013, bls. 218). Sömu sögu er að segja í umfjöllun um hæfnisviðmið. Þar er lögð áhersla á nemendur hafi þróað með sér hæfni til þess að nota viðeigandi hjálparkæki til stærðfræðilegra verka. Má þar nefna t.d. notkun tölvutækni til þess að teikna, rannsaka og setja fram rök um rúmfræðilegar teikningar (Mennta- og menningarmálaráðuneytið, 2013, bls. 212-216). Þó tölvuforritið GeoGebra sé ekki sérstaklega nefnt í þessu samhengi þá er það svo sannarlega eitt af þeim mörgu hjálparkækjum sem auðveldað geta nemendum að skilja stærðfræðina, ef þeir fá að nota það við lausn verkefna.

Í kennsluleiðbeiningum með kjarnanámsefninu Átta-tíu benda höfundarnir margsinnis á tengingar tölvutækninnar við stærðfræðinámi. Það er líklega ekkert skrítið þar sem tekið er mið af áherslum aðalnámskrár þegar námsefnið var samið. Höfundarnir benda á ýmiss smáforrit, töflureikna og fallforrit, þar á meðal GeoGebra, sem nýst geta nemendum til þess að rannsaka og skoða stærðfræðileg fyrirbæri. Þessi forrit telja þeir nýtast nemendum m.a. við líkanasmíði, tölfræði vinnslu og að teikna upp gröf falla. Það eru viðfangsefni sem krefjast oft mikillar vinnu og útreikninga. Tölvutæknin getur því einfaldað vinnu nemenda og gert þeim auðveldara að prófa sig áfram með hugmyndir sínar og skoða á fljótvirkan hátt ýmiss stærðfræðileg fyrirbæri (Guðbjörg Pálsdóttir og Guðný Helga Gunnarsdóttir, 2007 og 2008).

3 Um forritið GeoGebra

Forritið GeoGebra skipar stóran sess í þessu lokaverkefni þar sem öll verkefni í verkefnaheftinu eru hönnuð með það í huga að notast sé við forritið við lausn þeirra. Í þessum kafla er ætlunin að fjalla í stuttu máli um forritið GeoGebra. Byrjað er á að skýra frá því hvað GeoGebra er. Þá er greint stuttlega frá uppruna forritsins og að lokum er fjallað um helstu kosti þess og mikilvæga kosti tengda notkun þess við stærðfræðikennslu.

3.1 Hvað er GeoGebra

GeoGebra er tölvuforrit sem nota má við stærðfræðináms og stærðfræðikennslu. Forritið hentar sérstaklega vel til kennslu í rúmfræði og algebru auk þess sem notast má við forritið við nám og kennslu í stærðfræðigreiningu og tölfræði. Nota má forritið til þess að skoða og greina jafnt einfaldari hugtök og viðfangsefni stærðfræðinnar sem og flóknari. Því má segja að notkun þess sé ekki bundin við eitt skólástig heldur megi nota það við nám og kennslu á öllum skólástigum. Þá er eitt af aðalsmerkjum forritsins sá eiginleiki að það er kvíkt. Það hefur þá þýðingu að eftir að teiknuð hefur verið upp mynd í forritinu þá má breyta henni á ýmsa vegu t.d. með því að draga til punkta, spegla um línu o.s.frv. en útreiknaðar stærðir breytast með (Freyja Hreinsdóttir, 2010, bls. 1-2).

Freyja Hreinsdóttir (2010, bls. 2) hefur lýst algengustu notkuninni á forritinu í skólástarfi. Hún segir að forritið sé aðallega notað á þrjá vegu:

- ✓ Sem tæki til að búa til myndir sem límdar eru inn í textaskjal.
- ✓ Sem tæki til framsetningar.
- ✓ Sem tæki til tilrauna fyrir nemendur.

Höfundur er mjög sammála þessari greiningu Freyju. Sem nemanda hefur GeoGebra nýst höfundi vel við myndsmíð á stærðfræðilegum fyrirbærum og sem tæki til þess að gera stærðfræðilegar athuganir á einföldum og flóknum stærðfræðilegum fyrirbærum. Þá hefur notkun kennara á GeoGebra til þess að útskýra ýmiskonar stærðfræðileg viðfangsefni og hugtök hjálpað höfundi að skapa sjónrænar tengingar og gert framsetninguna skýrari.

3.2 Uppruni Geogebra

GeoGebra er upprunalega hannað af Austurríkismanninum Markus Hohenwarter. Það varð til í kringum meistaraþrófsverkefni hans frá Háskólanum í Salzburg í Austurríki árið 2001. Grunnhugmyndin í kringum þróun forritsins var að hanna forrit sem sameinaði rúmfræði, algebru og stærðfræðigreiningu, en það var eitthvað sem sambærileg forrit á markaði gerðu ekki (Hohenwarter, M., Jarvis, D. og Lavicza, Z., 2009).

Eftir að hafa gert forritið aðgengilegt á Netinu árið 2002 hafa hlutirnir fljótt undið upp á sig. Áhugi kennara á forritinu var mun meiri en Hohenwarter þorði nokkurn tíma að ímynda sér auk þess sem forritinu hlotnaðist fjölmörg verðlaun á sviði hugbúnaðar til kennslu. Þessi árangur hefur verið Hohenwarter hvatning til þess að halda áfram að þróa forritið og byggja upp notendasamfélag í kringum það (Hohenwarter, M. og Lavicza, Z., 2007, bls. 49-51). Hohenwarter stendur ekki lengur einn að baki GeoGebra. Hann hefur fengið í lið með sér nokkurn fjölda samstarfsaðila sem taka þátt í hugmyndavinnu og forritun. Forritið hefur einnig verið þýtt yfir á fjölmörg tungumál af sjálfbóðaliðum víðsvegar að úr heiminum.

GeoGebra hefur frá fyrsta degi verið svokallaður frjálss (e. open-source) hugbúnaður. Þetta þýðir að hinn almenni notandi sem og menntastofnanir geta frítt hlaðið niður forritinu og notast við það í námi og kennslu. Hugmyndafræði Hohenwarter og þeirra sem standa að baki GeoGebra er að menntun eigi að vera ókeypis (Freyja Hreinsdóttir, 2010, bls. 3). Þetta hefur hjálpað til við framgang forritsins og gert það að verkum að margir eru tilbúnir að vinna í sjálfbóðastarfi að útbreiðslu þess.

3.3 Kostir GeoGebra

Kostir GeoGebra eru fjölmargir. Meðal augljósra kosta er að notendaviðmót forritsins er mjög einfalt. Þetta gerir það að verkum að notendur þess þurfa ekki of langan tíma í þjálfun fyrir notkun þess auk þess sem forritið hentar einnig yngri aldurshópum. Annar augljós kostur er sá að forritið sé frítt. Það þýðir að hvorki kennarar né nemendur þurfi að kaupa forritið vilji þeir nota það. Forritið er því ekki bundið við tölvur skólans heldur geta nemendur og kennarar hlaðið því niður á einkatölvur og unnið með það utan veggja skólans. Þá er það einnig mikill kostur fyrir íslenska notendur að búið er að þýða forritið auk hjálpargagna þess yfir á íslensku.

Aðrir kostir eru eftirfarandi:

- ✓ GeoGebra gerir stærðfræði áþreifanlegri.
- ✓ GeoGebra auðveldar nemendum að læra stærðfræði til skilnings
- ✓ GeoGebra gerir stærðfræði kvika, gagnvirka og skemmtilega

Hvað varðar að gera stærðfræði áþreifanlegri og að auðvelda nemendum að læra stærðfræði til skilnings þá tengir GeoGebra saman rúmfræði og algebru á sjónrænan máta (Freyja Hreinsdóttir, 2010, bls. 3). Þegar nemendur eru kynntir fyrir nýjum stærðfræðilegum hugtökum þurfa þeir að hugsa, sjá fyrir sér og rannsaka tengsl og mynstur. Þeir þurfa að smíða það sem David Tall og Shlomo Vinner (1981, bls. 152) kalla hugtakamynd (e. concept image) fyrir hvert nýtt hugtak. Með því að kynna hugtök með

myndrænni framsetningu geta nemendur á einfaldari hátt skapað tengingar milli mynda, stærðfræðihugtaka og táknrænnar framsetningar stærðfræðinnar. Forrit eins og GeoGebra er einmitt kjörið verkfæri fyrir kennara til þess að skapa myndræna framsetningu á stærðfræðilegum hugtökum.

Hvað varðar að gera stærðfræði kvika, gagnvirka og skemmtilega þá má segja að nota megi GeoGebra og GeoGebraverkefni til þess að virkja áhuga nemenda á stærðfræði. Þetta getur reynst erfiðara og erfiðara eftir því sem stærðfræðin þyngist og verður meira óhlutbundin. Þar kemur GeoGebra til skjalanna því forritið gerir nemendum meðal annars kleift að sjá myndræna framsetningu ýmissa stærðfræðilegra viðfangsefna og auðveldar tengingu stærðfræðilegra verkefna við raunveruleikann (Pierce, R. og Stacey, K., 2011, bls. 41-43). Þá má segja að vinnan með GeoGebra, sem nemendum finnst í flestum tilfellum skemmtileg, geti leitt af sér jákvæðara viðhorf gagnvart stærðfræði almennt. Um er að ræða það sem Pierce, R. og Stacey, K (2011, bls. 42) kalla geislabaugshrif (e. halo effect), þar sem jákvæð upplifun gagnvart einstök atriðum getur haft áhrif á heildarmyndina.

3.4 Að byrja að nota GeoGebra við kennslu

Kennurum finnst stundum erfitt að brydda upp á nýjungum í kennslu og þá sérstaklega ef þær krefjast mikils undirbúnings. Það er mat höfundar að undirbúningstími til þess að byrja að nota GeoGebra við kennslu þurfi ekki að vera of mikill. Nú þegar hafa margir starfandi stærðfræðikennarar og kennaranemar kynnst GeoGebra í gegnum kennaranám sitt eða símenntunarnámskeið. Þeir kennarar ættu flestir að vera í stakk búnir til þess að geta notast við það við kennslu enda er notendaviðmót GeoGebra mjög þægilegt og forritið einfalt í notkun. Fyrir þá kennara sem ekki hafa haft kynni af forritinu þá má mæla með því að þeir hlaði niður íslenskri þýðingu af bókinni um GeoGebra. Hana má nálgast hér: https://skrif.hi.is/geogebra/?page_id=114. Í bókinni koma fram grunnatriði í notkun forritsins auk þess sem þar má finna fjölmörg æfingarverkefni sem nýtast vel til sjálfnáms eða jafnvel til þess að leggja fyrir nemendur.

Til þess að geta leiðbeint nemendum við vinnu verkefnaheftisins, sem er afrakstur þessa lokaverkefnis, þá þurfa kennarar að búa yfir grunnfærni í notkun GeoGebra. Það þýðir að þeir þurfi að þekkja til helstu verkfæra forritsins og virkni þeirra, að þeir hafi smá þjálfun í nota forritið til myndsmíða, hafi framkvæmt dragpróf og þekki vel hvernig rennistikur virka. Allt eru þetta atriði sem er auðvelt að rifja upp eða læra með hjálp bókarinnar um GeoGebra.

4 Tildrög, markmið og gagnsemi lokaverkefnis

Líkt og kemur fram í inngangi þessa lokaverkefnis þá er það mat höfundar að skortur sé á fjölbreyttum stærðfræðiverkefnum þar sem tölvutækni er nýtt. Markmið þessa lokaverkefnis er því að auka fjölbreytni í úrvali námsefnis tengt stærðfræði og notkun tölvutækninnar. Þá sér í lagi tengt notkun tölvuforritsins GeoGebra við lausn stærðfræðiverkefna. Það er ekki svo að skilja að ekki sé til neitt íslenskt námsefni í þessum flokki. Það er alls ekki raunin því á síðustu 4 til 5 árunum hafa nemendur við Menntavísindasvið HÍ verið nokkuð duglegir við að taka þátt í að semja slíkt námsefni. Það er þó mat höfundar að það efni sé almennt ekki nægjanlega heilsteypt né aðgengilegt fyrir kennara. Með auknu úrvali getur ástandið bara batnað. Alla veganna er það skoðun höfundar að það hljóti að teljast jákvætt að kennarar hafi úr fjölbreyttu safni námsefnis að velja þegar kennsla er skipulögð.

Í bók sinni Fagleg kennsla í fyrirrúmi leggja höfundarnir Árdís Ívarsdóttir, Hafdís Guðjónsdóttir og Matthildur Guðmundsdóttir (2005) mikla áherslu á mikilvægi fjölbreytts námsefnis og fjölbreyttra kennsluaðferða. Sömu áherslu má einnig finna í nýrri Aðalnámskrá fyrir grunnskóla. Þessi áhersla er ekki síst ætluð til þess að mæta ólíkum þörfum nemenda. Von höfundar er því að verkefnaheftið sem varð til við vinnslu þessa lokaverkefnis nýtist til að auka fjölbreytnina í stærðfræðinámi nemenda á unglingastigi.

Verkefnaheftinu er einnig ætlað að mæta breyttum áherslum aðalnámskrárinnar t.d. er varðar aukna áherslu á notkun tölvutækninnar. Tölvutæknin er orðin mikilvægari í daglegu lífi og úti á vinnumarkaðinum og miklar líkur er á að þróunin haldi áfram á sömu braut. Nauðsynlegt er því að búa nemendur undir þann veruleika og eru stærðfræðihjálpartæki eins og GeoGebra einn liður í því.

Að lokum þá er það von höfundar að þetta verkefnaheftið verði til þess að nemendur læri stærðfræði til skilnings í stað þess að læra eingöngu reglur og hvenær þeim skuli beitt.

5 Verkefnahefti

Í verkefnaheftinu má finna níu sjálfstæð verkefni. Viðfangsefni þeirra spanna m.a. rúmfræði, algebru og fjármál og eru verkefnin hugsuð fyrir nemendur á unglingsstigi. Hugmyndin er að þessi verkefni megi nota sem ítarefni með kjarnanámsefninu Átta-tíu. Með þeim eiga kennarar að geta boðið nemendum upp á tilbreytingu frá kjarnanámsefninu og aukið fjölbreytnina í kennslu sinni á stærðfræði. Þá er von höfundar að vinna nemenda með verkefnin geri þeim kleyft að skapa sjónræna tengingu við þau stærðfræðilegu viðfangsefni sem fengist er við og þannig dýpkað skilning þeirra á þeim.

Þó svo verkefnin séu hugsuð sem ítarefni með kjarnanámsefninu Átta-tíu þá er ekkert til fyrirstöðu að notast við þau þó svo kennt sé annað kjarnanámsefni eins og t.d. Almenn stærðfræði.

5.1 Lýsing á verkefnum og markmiðum þeirra

Í þessum kafla er gefin stutt lýsing á verkefnum verkefnaheftisins. Í kaflanum verður einnig farið yfir markmið hvers verkefnis. Verkefnin er samin með áherslur Aðalnámskrár grunnskóla í huga þannig að markmiðin tengjast beint áfangamarkmiðum og hæfniviðmiðum sem sett eru fram þar. (Mennta- og menningarmálaráðuneytið, 2007 og 2013).

Þá má nefna að hluti af þessum verkefnum er byggður á hugmyndum eða GeoGebraskjölum sem höfundir hafa þótt áhugaverð. Í þessum kafla verður því einnig tilgreint hvaða efni stuðst var við þegar verkefnin voru samin og GeoGebraskjölun útbúin.

5.1.1 Verkefni 1 Að fá tilfinningu fyrir rúmfræðilegum færslum

Þetta verkefni er ætlað fyrir nemendur í 8. bekk grunnskóla. Verkefnið er ætlað sem ítarefni við umfjöllun um rúmfræðilegar færslur í kjarnanámsefninu Átta-tíu, bók nr. 2. Markmið verkefnisins er að skerpa á skilningi nemenda á rúmfræðilegum færslum og þjálfar nemendur í notkun hjálpargagna við lausn verkefna. Að loknu þessu verkefni eiga nemendur að kannast við nokkrar tegundir af rúmfræðilegum færslum líkt og speglanir, hliðranir og snúninga og kunna að notfæra sér forritið GeoGebra við lausn rúmfræðilegra verkefna.

Verkefni þetta er byggt á erlendri fyrirmynd eftir höfundana Mazany, M. og Olson, R. (e.d.).

5.1.2 Verkefni 2 Ummál og flatarmál réttthyrnings

Þetta verkefni er líkt og verkefni 1 ætlað fyrir nemendur í 8. bekk grunnskóla. Verkefnið er ítarefni við umfjöllun um hringi og hyrninga sem finna má í kjarnanámsefninu Átta-tíu, bók

nr. 1. Þó má hugsa sér að leggja það fyrir nemendur allt frá 6.-10. bekkjar ef gerðar eru á því svolitlar áherslubreytingar. Verkefnið er tilvalið til þess að skerpa á skilningi nemenda á flatarmáli og ummáli rétthyrninga.

Þetta verkefni er rannsóknarverkefni tengt ummáli og flatarmáli rétthyrnings. Markmiðið með fyrri hluta verkefnisins er að nemendur læri að tjá sig um stærðfræði og geti rökstutt niðurstöður sínar. Markmiðið með seinni hluta verkefnisins er að láta nemendur skoða samband flatarmáls og ummáls. Einnig að nemendur geti hannað rétthyrning með gefnu ummáli og flatarmáli og áttað sig á því að rétthyrningur með gefið flatarmál getur haft breytilegt ummál og rétthyrningur með gefið ummál getur haft breytilegt flatarmál.

Hugmyndin að verkefninu er alfarið frá höfundinum komin. Þó ber að taka fram að við hönnun á GeoGebraskjalinu sem unnið er með í verkefninu var stuðst við erlenda fyrirmynd sem sótt er frá Svenska GeoGebrainstitutet (e.d.).

5.1.3 Verkefni 3 Sívalningur og kúla

Þetta verkefni er ætlað fyrir 8.-10. bekk í grunnskóla. Verkefnið má t.d. hugsa sem ítarefni fyrir nemendur 10. bekkjar við umfjöllun um rúmfræði og algebru sem finna má í bók Átta-tíu, bók nr. 5. Markmiðið með verkefninu er að nemendur átti sig á rúmmáli og kunni reglur um rúmmál og yfirborðsflatarmál sívalnings og kúlu. Þá er einnig markmiðið að nemendur skilji hvernig þessar reglur/formúlur eru til komnar með því að velta fyrir sér tengingu við algebru. Að lokum þá er í verkefninu smá æfing í notkun mælieininga.

Hugmyndin að verkefninu er höfundar. Það ber þó að taka fram að GeoGebraskjölín sem unnið er með í verkefninu eru smíðuð eftir erlendum fyrirmyndum sem sóttar eru frá GeoGebra Tube Team (2012 og 2012a). Þessi skjöl má finna á vefsíðunni <http://www.geogebraTube.org/>.

5.1.4 Verkefni 4 Jafna beinnar línu

Þetta verkefni er ætlað fyrir 8.-9. bekk í grunnskóla. Það má hugsa sem ítarefni fyrir nemendur 8. bekkjar við umfjöllun um jöfnur og línurit sem finna má í Átta-tíu, bók nr. 2. Eins þá má hugsa verkefnið sem ítarefni fyrir nemendur í 9. bekk við umfjöllun um jöfnur og gröf sem finna má í Átta-tíu, bók nr. 3, eða ítarefni fyrir sama bekk tengt umfjöllun um jöfnur sem finna má í Átta-tíu, bók nr. 4.

Markmiðið með verkefninu er að nemendur þekki bæði rúmfræðilega og algebrulega túlkun á hallatölu línu og geti fundið skurðpunkt við y-ás með því að staðsetja tvo punkta línu rétt á GeoGebragrafi. Einnig að nemendur þekki hvernig nota má upplýsingar um hallatölu línu og skurðpunkt hennar til þess að finna jöfnu línunnar.

Hugmyndin að verkefninu er höfundar. Aftur á móti eru GeoGebraskjölin sem unnið er með í verkefninu búin til eftir erlendum fyrirmyndum sem sóttar eru frá höfundunum Cox, D. (2011) og Tintinwhite (2013). og finna má á <http://www.geogebra.org/>.

5.1.5 Verkefni 5 Annars stigs jöfnur

Þetta verkefni er ætlað fyrir 9.-10. bekk í grunnskóla. Verkefnið má t.d. hugsa sem ítarefni fyrir nemendur 10. bekkjar við umfjöllun um algebru og jöfnur sem finna má í Átta-tíu, bók nr. 6. Markmið með verkefninu er að nemendur geti teiknað fall annars stigs jöfnu í hnitakerfi með hjálp GeoGebra og hafi kynnst ferli annars stigs falls, þ.e. fleygboga. Aðalmarkmiðið er svo að nemendur læri að túlka annars stigs jöfnur í hnitakerfi og geti notað teikningar í hnitakerfi til þess að leysa þær. Það er að segja til þess að finna skurðpunta við x-ásinn eða ræturnar margliðunnar.

Hugmyndin að verkefninu er höfundar en vissulega var smá innblástur sóttur úr áður nefndum kafla Algebra og jöfnur sem finna má í Átta-tíu, bók nr. 6.

5.1.6 Verkefni 6 Pýþagóras

Þetta verkefni er töluvert frábrugðið hinum verkefnum í þessu safni og flestum þeim verkefnum sem nemendur leysa dags daglega í stærðfræðinámi sínu. Verkefnið er ætlað fyrir 9.-10. bekk í grunnskóla. Það má t.d. hugsa sem ítarefni fyrir nemendur 10. bekkjar við umfjöllun um kaflann Pýþagóras sem finna má í Átta-tíu, bók nr. 5.

Aðalmarkmið með verkefninu er að nemendur kunni setningu Pýþagórasar og geti beitt setningunni í margvíslegu samhengi. Önnur markmið eru að nemendur læri að vinna skipulega í samvinnu við aðra og að þeir geti undirbúið og flutt sameiginlegar kynningar tengdar viðfangsefnum stærðfræðinnar með aðstoðar upplýsingartækni.

Hugmyndin að verkefninu er höfundar en segja má að innblástur er sóttur úr kynningu skjámyndbandahóp Nordic GeoGebra Network um hagnýtingu GeoGebra og sjámyndbanda í stærðfræðikennslu sjá <https://skrif.hi.is/geogebra/?p=230>. Við gerð GeoGebraskjalsins var aftur á móti stuðst við erlenda fyrirmynd sem hönnuð er af Analise Beltran (2011).

5.1.7 Verkefni 7 Bifreiðakaup

Þetta verkefni er lítið rauntengt rannsóknarverkefni sem er ætlað fyrir 9.-10. bekk í grunnskóla. Ætlunin er að láta nemendur rannsaka bifreiðakaup. Það er að segja hvort hagstæðara sé að kaupa hefðbundinn bensínbíl eða bensínbíl með Hybrid-tækni út frá ákveðnum gefnum forsendum. Hægt er að hugsa sér þetta verkefni sem ítarefni t.d. með kaflanum unglingar og fjármál í Átta-tíu, bók nr. 6.

Markmið með verkefninu er að nemendur læri að þýða verkefni úr daglegu lífi yfir á táknmál stærðfræði og geta túlkað lausn stærðfræðiverkefnisins sem lausn á upphaflega verkefninu. Einnig að nemendur skilji að skurðpunktur milli tveggja ósamsíða lína þýði að þar hafi föllin sömu x- og y-gildi og að í þeim punkti skipti föllin um stöðu. Þ.e. það sem var áður hagstæðara verður þar eftir óhagstæðara og öfugt.

GeoGebraskjalið sem unnið er með í verkefninu eru byggt á erlendri fyrirmynd sem sótt er frá höfundinum Cox, D. (2012) og finna má á <http://www.geogebraTube.org/>. Segja má að hugmyndin að verkefninu sé því frá David Cox komin en útfærslan á sjálfu verkefninu sem finna má í verkefnaheftinu er alfarið höfundar.

5.1.8 Verkefni 8 Val á farsímaáskrift

Verkefnið er lítið rauntengt rannsóknarverkefni sem ætlað er fyrir nemendur 9.-10. bekkjar í grunnskóla. Ætlunin er að láta nemendur rannsaka mismunandi áskriftarleiðir fyrir farsíma og komast að því hvaða leið hentar ólíkum einstaklingum og mögulega þeim sjálfum. Hægt er að hugsa sér þetta verkefni sem ítarefni t.d. með kaflanum Unglingar og fjármál í Átta-tíu, bók nr. 6.

Markmiðið með verkefninu er að nemendur læri að þýða verkefni úr daglegu lífi yfir á táknmál stærðfræði og geta túlkað lausn stærðfræðiverkefnisins sem lausn á upphaflega verkefninu. Þá er einnig markmið verkefnisins að nemendur kynnist betur forritinu GeoGebra og þeim möguleikum sem forritið hefur að bjóða við úrlausn stærðfræðilegra viðfangsefna.

Hugmyndin að þessu verkefni er alfarið höfundar og það sama á við um hönnum GeoGebraskjalsins.

5.1.9 Verkefni 9 Samanburður á tímakaupi og jafnaðarkaupi

Verkefnið er rauntengt rannsóknarverkefni sem ætlað er fyrir nemendur 9.-10. bekkjar í grunnskóla. Ætlunin er að láta nemendur rannsaka muninn á því að fá greitt tímakaup samkvæmt kjarasamningi eða jafnaðarkaup sem ákveðið er einhliða af atvinnurekanda. Hægt er að hugsa sér þetta verkefni sem ítarefni t.d. með kaflanum Unglingar og fjármál í Átta-tíu, bók nr. 6.

Verkefni 7, 8 og 9 eru öll af sama toga þar sem þau eru öll rauntengd rannsóknarverkefni. Aftur á móti má segja að tilgangur þeirra og markmið séu svipuð þó svo viðfangsefnin séu ólík. Í raun eru markmið þessa verkefnis þau sömu og markmið verkefnis 8.

Hugmyndin að þessu verkefni er alfarið höfunda. Hugmyndin fæddist í kjölfar mikillar umræðu í íslenskum fjölmiðlum um jafnaðarkaup sem átti sér stað sumarið 2014.

5.2 Notkun verkefnaheftis

Í verkefnaheftinu má finna níu sjálfstæð verkefni af mismunandi stærðargráðum. Þó svo þau séu skipulögð sem heildstæð verkefni þá má sannarlega brjóta þau niður í smærri einingar. Eins má með lítilli fyrirhöfn aðlaga flest verkefnin að mismunandi þörfum nemenda með því að sleppa einstaka liðum eða gera lítilsháttar breytingar. Það ber að taka það fram að ekki tókst að prófa öll verkefnin á nemendum eða sjálfboðaliðum á meðan vinnslu lokaverkefnisins stóð.

Mælt er með góðum undirbúningi kennara fyrir vinnslu með verkefnin.

6 Kennsluleiðbeiningar

Kennsluleiðbeiningaheftið sem fylgir verkefnaheftinu skiptist í tvo hluta. Annarsvegar kennsluleiðbeiningar og hinsvegar lausnir. Kennsluleiðbeiningar fylgja með hverju verkefni og er skipt upp í fjóra undirkafla.

- ✓ Lýsing á verkefni
- ✓ Markmið með verkefni
- ✓ Undirbúningur og framkvæmd verkefnis
- ✓ Rökstuðningur fyrir notkun GeoGebra við lausn verkefnis

Í fyrsta undirkaflanum er gefin stutt lýsing á verkefninu og tekið fram fyrir hvaða aldurshóp verkefnið er ætlað. Þá er tilgreint fyrir hvaða viðfangsefni úr kjarnanámsefninu Átta-tíu verkefnið er hugsað sem ítarefni. Eins er tekið fram hvaða stærðfræðilegu hæfni eða forþekkingu nemendur þurfa að búa yfir við vinnslu verkefnisins. Að lokum er tilgreint hvort verkefnið henti sem einstaklings- para- eða hópverkefni og áætlað hve langan tíma það taki nemendur að leysa verkefnið.

Í undirkafla tvö eru tilgreind markmiðin með verkefninu. Þar sem verkefni eru samin með áherslur Aðalnámskrár grunnskóla í huga þá ríma markmiðin vel við áfangamarkmið og hæfniviðmið sem þar er að finna. Helsti munurinn tengist þeim markmiðum sem sérstaklega fjalla um forritið GeoGebra því í Aðalnámskránni er almennt bara talað um tölvutækni (Mennta- og menningarmálaráðuneytið, 2013, bls. 212-213).

Í kaflanum Undirbúningur og framkvæmd er farið yfir þann undirbúning sem kennarar þurfa fyrir verkefnið og praktísk atriði sem hafa þarf í huga áður en verkefnið er lagt fyrir og á meðan vinnu nemenda stendur. Að lokum er svo í síðasta undirkaflanum fjallað um ástæður þess að verkefnið sé unnið í GeoGebra en ekki með hefðbundnum aðferðum.

Í lausnarhluta kennsluleiðbeiningaheftisins má svo finna lausnir við verkefnunum. Nauðsynlegt er að hafa í huga að margar spurningar eru þess eðlis að ekki er til neitt eitt rétt svar. Í þeim tilfellum hefur höfundur sett fram tillögu að svari en það er lagt í hendur hvers og eins kennara að meta hvort svör nemenda eru talin fullnægjandi eða ekki. Þá má einnig nefna að verkefni 6 er svolítið sér á parti og að með því fylgir tillaga að matsblaði í stað lausnar.

7 Lokaorð

Vinnan við þetta lokaverkefni hefur verið nokkuð strembin en um leið gefandi. Það sem helst hefur reynt á er hugmyndavinnan og þau fjölmörgu handverk sem þurfti til þess að láta verkefni og GeoGebraskjöl virka sem skyldi. Eins hefur það reynst krefjandi fyrir mig sem kennaranema að semja verkefni út frá þeim ramma sem Aðalnámskrá grunnskóla markar. Aftur á móti hefur það verið mjög gefandi að fá jákvæð viðbrögð á verkefni frá nemendum og kennurum. Það hefur hvatt mig áfram til þess að vinna þessu vinnu af metnaði og til þess að ljúka þessu verki.

Ég hef verið sannfærður um ágæti GeoGebra frá fyrstu stundu og vinnsla þessa lokaverkefnis hefur styrkt mig í þeirri trú. Að mínu áliti eru kostir forritsins óumdeilanlegir og forritið sannarlega ákjósanlegt hjálpartæki þegar kemur að því að kenna nemendum stærðfræði til skilnings.

Heimildaskrá

- Analise Beltran. (2011). Pythagorean Triple 15, 20, 25 [GeoGebraskjal]. Sótt af <http://geogebraTube.org/material/show/id/1015>
- Árdís Ívarsdóttir, Hafdís Guðjónsdóttir og Matthildur Guðmundsdóttir. (2005). Fagleg kennsla í fyrirrími. Offsetfjölritun hf., Reykjavík.
- Cox, D. (2011). *Linear equations mixed forms* [GeoGebraskjal]. Sótt af <http://www.geogebraTube.org/material/show/id/830>
- Cox, D. (2012). *Hybrid vs. Gas* [GeoGebraskjal]. Sótt af <http://www.geogebraTube.org/material/show/id/18058>
- Freyja Hreinsdóttir. (2010). Íslenska GeoGebrustofnunin: Ókeypis, opinn hugbúnaður og ókeypis, opið kennsluefni. *Netla – Veftímarit um uppeldi og menntun*. Sótt af <http://netla.hi.is/menntakvika2010/alm/011.pdf>
- GeoGebra Tube Team. (2012). *Find the volume of a sphere* [GeoGebraskjal]. Sótt af <http://geogebraTube.org/material/show/id/36441>
- GeoGebra Tube Team. (2012a). *Right Circular Cylinder* [GeoGebraskjal]. Sótt af <http://geogebraTube.org/material/show/id/8871>
- Guðbjörg Pálsdóttir og Guðný Helga Gunnarsdóttir. (2007). *Átta-tíu Stærðfræði 5, Kennsluleiðbeiningar*. Námsgagnastofnun. Reykjavík.
- Guðbjörg Pálsdóttir og Guðný Helga Gunnarsdóttir. (2008). *Átta-tíu Stærðfræði 6, Kennsluleiðbeiningar*. Námsgagnastofnun. Reykjavík.
- Guðný Helga Gunnarsdóttir og Guðbjörg Pálsdóttir. (2010). The Implementation of the Intended Curriculum in Teaching Materials: Author's Perspective. Í Sriraman, B., Bergsten, C., Goodchild, S., Pálsdóttir, G., Dahl, B. og Happsalo, L. (ritstj.) *The First Sourcebook on Nordic Research in Mathematics Education*, bls. 539–553. Chartlotte, NC; Information Age Publishing.
- Hohenwarter, M. og Lavicza, Z. (2007). Mathematics teacher development with ICT: towards international GeoGebra institute. *Proceedings of the British Society for Research into Learning mathematics*, 27(3), 49-54.

Hohenwarter, M., Jarvis, D. og Lavicza, Z. (2009). The International Journal for Technology in Mathematics Education, 16(2), 83-86.

Mazany, M. og Olson, R. (e.d.). „Trycky transformations“ via GeoGebra [wordskjal]. Sótt af <http://www.fredonia.edu/departments/math/Methods2008/AMTNYSLessonPlans/TransformationsGeoGebra.doc>

Menningarmálaráðuneytið. (2007). *Aðalnámskrá grunnskóla – Stærðfræði*. Reykjavík: Menningarmálaráðuneytið.

Mennta- og menningarmálaráðuneytið. (2013). *Aðalnámskrá grunnskóla – almennur hluti 2011 – greinasvið 2013*. Reykjavík: Mennta- og menningarmálaráðuneytið.

Pierce, R. og Stacey, K. (2011). Using dynamic geometry to bring the real world into the classroom. Í L. Bu, og R. Schoen (ritstjórar). *Model-centered learning - Pathways to mathematical understanding using GeoGebra* (bls. 41-56). Rotterdam: Sense Publishers.

Svenska GeoGebrainstitutet. (e.d.). *Undervisningsresurser* [GeoGebraskjal]. Sótt af http://www.geogebrainstitut.se/resurser/ggb/area_och_omkrets.ggb

Tall, D. og Vinner, S. (1981). Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12(2), 151-169.

Tintinwhite. (2013). *Find equation of line passing through two points* [GeoGebraskjal]. Sótt af <http://www.geogebraTube.org/material/show/id/46258>