



Ólán að gleyma bókinni!

Kennsla stærðfræðiáfanga á vefnum

Gunnar Björn Björnsson

Lokaverkefni til M.Ed.-prófs

Kennaradeild



HÁSKÓLI ÍSLANDS
MENNTAVÍSINDASVIÐ

Ólán að gleyma bókinni
Kennsla stærðfræðiáfanga á vefnum

Gunnar Björn Björnsson

Lokaverkefni til M.Ed.-prófs
í menntun framhaldsskólakennara
Leiðbeinandi: Freyja Hreinsdóttir

Kennaradeild
Menntavísindasvið Háskóla Íslands
Apríl 2015

Ólán að gleyma bókinni.

Ritgerð þessi er 30 eininga lokaverkefni til M.Ed.-prófs við kennaradeild, Menntavísindasviði Háskóla Íslands.

© 2015 Gunnar Björn Björnsson

Greinargerðina má ekki afrita nema með leyfi höfundar.

Prentun: Háskólaprent

Reykjavík, 2015

Formáli

Þessi ritgerð er greinargerð með 30 eininga lokaverkefni mínu til meistaraþrófs á námsbrautinni menntun framhaldsskólakennara. Útskrift úr náminu er nauðsynleg forsenda fyrir því að fá leyfisbréf sem framhaldsskólakennari. Verkefnið er rafræn námsefnisgerð fyrir skilgreinda námseiningu í stærðfræði sem fjallar um vigra og hornaföll. Námsefnið inniheldur bæði verkefnasafn og vídeó sem hvort tveggja má finna á vefnum algebra.is. Verkefnið er framlag mitt til námsefnisgerðar, námskrárgerðar og ákalls eftir fjölbreyttari kennsluháttum í stærðfræði.

Þó að ég hafi borið meginþungann af vinnunni eru þó fjölmargir sem hafa lagt hönd á plóg með einum eða öðrum hætti. Ég vil þakka leiðbeinanda mínum, Freyju Hreinsdóttur, fyrir frábært samstarf. Það sama gildir um Salvöru Gissurardóttur sem var skipaður sérfræðingur í verkefninu. Kristín Bjarnadóttir setti fram gagnlegar ábendingar. Tryggvi Þór Kristjánsson, Ingibjörg Ýr Pálmadóttir starfsmaður ritversins og Hanna Kristín Stefánsdóttir hafa öll bætt verk mitt með ýmsum hætti og fá öll mínar bestu þakkir. Þá hafa Ingólfur Gíslason framhaldsskólakennari og Rögnvaldur Möller, prófessor í stærðfræði, báðir gefið mér góðar ábendingar sem ég er þakklátur fyrir. Fyrst og fremst vil ég þó þakka eiginkonu minni, Theodóru Mýrdal, og börnum mínum fyrir að sýna mér mikla þolinmæði og mikinn stuðning, sem reyndist mér ómetanlegur.

Ágrip

Með tilkomu internetsins hafa þróast nýjar kennsluaðferðir og leiðum nemenda til náms fjölgað. Einnig hefur orðið bylting í þróun hugbúnaðar til náms og kennslu. Þróun í námsefnisgerð er forsenda þess að skólakerfið geti lagað sig að þessum breytingum. Í þessu 30 eininga verkefni er reynt að koma til móts við þessa þörf. Samið var verkefnahefti þar sem sum verkefnanna eru gagnvirk á netinu. Einnig er breytt út af þeirri venju að kennslubók sé þungamiðjan en þess í stað voru gerð vídeó sem eiga með sjónrænum hætti að hjálpa nemandanum við merkingarsköpun hugtaka. Námsefnið er stærðfræði sem afmarkast við vigra og hornaföll.

Verkefnið var unnið þannig að verkefnabókin var skrifuð í umbrotsmálinu LaTeX. Fyrirlestraröðin var unnin með því að teikna flatarmyndir í forritinu GeoGebra, og gerð voru vídeó út frá þeim. Að lokum var valið vefkerfi og notendaviðmót með það fyrir augum að vefurinn myndi þægilegt vinnuumhverfi í stað þess að draga athyglina frá námsefninu.

Viðfangsefni greinargerðarinnar eru fjölbreytt og snúast þau að stærstum hluta um eftirfarandi hugleiðingar: Hvaða námsþættir í stærðfræði framhaldsskólanna eru best til þess fallnir að nota upplýsingatækni við merkingarsköpun þeirra? Hverjar eru hugmyndir höfundar um góða stærðfræðikennslu? Hvernig getur áðurnefnd vefeining orðið betra námsefni en það sem þegar er til um svipað efni? Hvað á að kenna í námseiningunni og hverjum? Stærsta spurningin er þó hvort sú fastmótaða hefð að vera með útgefna kennslubók í stærðfræði þarfnist endurskoðunar.

Í nútímanum verða mörkin milli bóka og margmiðlunarefnis stöðugt óljósari. Vel mætti hugsa sér vel unnið pdf-skjal sem bók, en einnig mætti nefna rafbækur í þessu sambandi. Helsta niðurstaða mín er sú að kennslubókin í sinni hefðbundnu mynd gagnist hvorki nemendum með mikla lestrarörðugleika né þeim sem gleyma að taka hana með sér í skólann enda felur titill verkefnisins það í sér!

Abstract

Oops! I forgot the textbook

– Teaching math course online

Since the emergence of the internet, people have been trying to use it for innovation in teaching. With new methods and ever-evolving software industry, new ways of teaching have been introduced and students' options have increased. The same evolution in learning materials is essential for school systems to adapt successfully to these new online methods. This 30 credit project is an attempt to help this process. This includes a workbook where some of the projects are interactive online. Also, a new approach is introduced whereas instead of a textbook being the center of the studies, a series of lectures and videos are online to help students visually assign meaning to various concepts. The focus of study here is mathematics centered on vectors and trigonometric functions.

The project has a workbook, written in the LaTeX markup language. The online lectures and videos have pictures drawn in the GeoGebra software. Finally, a web-system was chosen as well as an user interface, focusing on a comfortable working environment instead of moving focus off the curricula.

The project's tasks are varied, but are for the most part centered on the following questions: Which parts of math studies in high schools/universities are best suited for the use of visual multimedia? What are the author's ideas about productive math studies? How can math studies with the use of multimedia be better than previously established methods? What should be taught and for whom? The biggest question is, however, whether the tradition of using textbook in printed format may need to be reconsidered. In the modern world the line between books and multimedia is becoming a bit blurred. In theory, an elaborate pdf-file could even pass as a book; as well as e-books. The main conclusion is that the traditional textbook is less effective in math studies, especially for those with reading difficulties and of course those who forget to bring the book to class!

Efnisyfirlit

Formáli	3
Ágrip	5
Abstract	6
1 Inngangur	9
2 Námskrá vefsins	11
2.1 Almennnt um námskrár.....	11
2.2 Val út frá áhuga höfundar	13
2.3 Um stærðfræði í Aðalnámskrá framhaldsskóla: Almennum hluta 2011.....	15
2.4 Tengsl námsefnis vefsins við Aðalnámskrá framhaldsskóla: Almennan hluta 1999	17
2.5 Innihald námsefnisins og kaflaskiptingar þess	19
2.5.1 Kafli 1.....	19
2.5.2 Kafli 2.....	20
2.5.3 Kafli 3.....	21
2.5.4 Kafli 4.....	21
2.6 Markmið og hæfniviðmið áfangans.....	22
2.6.1 Almenn markmið og grunnþættir	22
2.6.2 Sértek hæfniviðmið náms um vigra og hornaföll.....	24
3 Hugleiðingar um stærðfræðikennslu	27
3.1 Um stærðfræðikennslu í framhaldsskólum	27
3.2 Þekkt vandamál við kennslu vigra og hornafalla	28
3.3 Er kennd stærðfræði í skólakerfinu?	30
3.4 Af hverju vefur?	32
3.5 Vendikennsla	35
3.6 Leiðbeiningar um notkun vefsins	38
3.6.1 Tilgangur vefsins.....	38
3.6.2 Hvað inniheldur vefurinn?	38
3.6.3 Tæknilegar forkröfur og námstækni fyrir vefinn?	39
4 Um hönnun og gerð námsefnisins	41
4.1 Verkefnasafnið	41
4.2 Vídeóin.....	43
4.3 Val á vefkerfi.....	44

5 Lokaorð.....	45
Heimildaskrá.....	47

1 Inngangur

Stærðfræði hefur mikið vægi í íslensku skólakerfi en deila má um hvort allir eigi að læra sömu stærðfræðina. En hver svo sem ástæðan er, þá er stærðfræði kennd í öllum framhaldsskólum landsins. Allir nemendur í framhaldsskóla taka að minnsta kosti einn áfanga í henni og margir taka fleiri. Í nýjustu aðalnámskrá framhaldsskólanna eru enska, íslenska og stærðfræði skilgreindar sem kjarnagreinar í öllu námi sem þar fer fram. Því er eðlilegt að ég hafi oft spurt mig þeirra spurninga hvers vegna stærðfræði sé talin svona merkilegt eða nauðsynlegt fag í skólum landsins og hvað það sé við hana sem mér hefur þótt nægilega heillandi til þess að gera stærðfræðikennslu að starfsvettvangi mínum.

Þegar ég var sjálfur nemandi í framhaldsskóla fyrir rúmum tuttugu árum voru þeir námsþættir, sem kenndir voru í stærðfræði í framhaldsskólum landsins, nánast nákvæmlega þeir sömu og þeir eru í dag. Þetta kemur varla mikið á óvart enda hvílir sú stærðfræði að miklu leyti á aldagömlum grunni sem hefur haldið gildi sínu vegna þess að stærðfræði er byggð á forsendum sem geta varla talist vera háðar tísku eða tíðaranda hverju sinni. Til dæmis er sú flatarmálsfræði, sem nú er kennd, byggð að stórum hluta á frumatriðum Evklíðs en hann var uppi löngu fyrir Krist. Að því gefnu að menn séu sáttir við þær frumforsendur sem stærðfræðingar gefa sér við uppbyggingu fræðagreinarinnar þá er sanngildi hennar því algjörlega varanlegt og verður því ekki úrelt nema einhverjar meiriháttar breytingar verði á frumforsendum hennar.

Á undanförunum áratugum eða svo hefur orðið bylting í upplýsingatækni sem vissulega hefur skilað sér að einhverju marki inn í almenna skólamenningu. Internetið hefur aukið möguleika almennings til upplýsingaöflunar svo um munar, auk þess sem framboð á hugbúnaði til náms og kennslu hefur snaraukist. Heimur internetsins og margmiðlunar er þó ógnarstór og auðvelt að drukkna í hinu mikla upplýsingastreymi sem þar er. Upplýsingatæknin er öflugt hjálpartæki en nokkuð vandmeðfarið sem slíkt.

Almenn skólaþróun og umbætur í námsefnisgerð hljóta að haldast í hendur enda ræður námsefnið því oft hvað er kennt. Kennslubókin sem slík hefur verið lífseig og sagt er að blindur sé bóklaus maður. Margmiðlun er þó miklu margþættara fyrirbæri en bókin. Lesandinn getur ekki stækkað eða minnkað letur kennslubókarinnar, hún inniheldur engin hljóð eða

hreyfimyndir og inniheldur ekki gagnvirk verkefni. Kennslubókin þyngir skólatöskuna öfugt við rafrænt námsefni sem er oft vistað á netinu. Nú á dögum verður því að telja hina hefðbundnu kennslubók nokkuð takmarkaða sérstaklega í ljósi þess að ekki er hægt að endurbæta hana nema prenta út nýja útgáfu með tilheyrandi notkun á pappír og þar með sóun á viðkvæmum og mikilvægum auðlindum jarðarinnar sem skógarnir eru. Ég er því eðlilega mjög gagnrýninn á þann hugsunarhátt að óhugsandi sé að kenna stærðfræðiáfangi án kennslubókar og eru skrif mín meðvitað lituð af því. Ég hef ekkert á móti bókarforminu sem slíku en bendi á nauðsyn þess að geta fjallað um stærðfræði á fleiri vegu en eingöngu með texta og myndum.

Ég get ekki varið talsmaður breytinga í námsefnisgerð, verið gagnrýninn á kennslubækur og haldið svo áfram að gefa þær út sjálfur! Ég vildi því gera heildstætt námsefni fyrir afmarkaða námseiningu í stærðfræði þar sem meginuppsprettan væri kennsluvefur í stað kennslubókar. Tilgangurinn með þessari greinargerð er sá að segja frá þeirri hugmyndafræði sem ég lagði til grundvallar verkinu og tilurð þess. Helstu útgangspunktur, sem ég hafði að leiðarljósi við hönnun verkefnisins og skrif þessarar greinargerðar voru eftirfarandi:

- Hvaða námsþættir úr stærðfræði eru best til þess fallnir að nota margmiðlun við merkingarsköpun þeirra?
- Hvað á að kenna í námseiningunni og hverjum á að kenna?
- Hverjar eru hugmyndir höfundar um góða stærðfræðikennslu?
- Hvernig getur vefurinn orðið betra námsefni en það sem þegar er til héraendis?
- Er það endilega ófrávikjanleg regla að nota útgefnar kennslubækur í stærðfræðikennslu?

2 Námskrá vefsins

2.1 Almennt um námskrár

Námskrá og námskrárgerð eru íslenskar þýðingar á enska orðinu „curriculum“. Walker og Soltis (2009) nota orðið „curriculum“ í mjög víðri merkingu. Í þeirra augum er námskrárgerð mikilvægur hluti af daglegu starfi sérhvers kennara. Þeir nefna fjölbreytt dæmi um hönnun og framkvæmd námskráa. Þegar námsbrautir skóla eru skilgreindar er það námskrávinna. Þegar námsþættir einstakra áfanga eru valdir er það námskrárgerð. Sama má segja um ákvarðanir um einstaka áfanga í boði. Þegar kennari gerir kennsluáætlun fyrir einstaka áfanga þá er það einnig námskrárgerð. Ákvörðun um námsmat og ákvörðun um vægi einstakra efnispátta fellur líka undir orðið námskrárgerð.

En enska orðið „curriculum“ hefur víðari merkingu sem yfirfæra má á daglegt líf. Þegar kennari ræðir við nemendur t.d. um umgengni og setur reglur í samráði við þá um slíkt þá er það hluti af námskrárgerð. Nemendur hafa áhrif á mótun námskrár, t.d. með því að velja sér valáfanga eða taka þátt í rektorskosningum. Skýrasta dæmið um áhrif nemenda á mótun námskrár er þegar þeir svara spurningalistum sem oft eru lagðir fyrir til að meta gæði kennslu og skipulag námskeiða eða áfanga. Samkvæmt Soltis og Walker má líta svo á að námskrárgerð sé algjörlega órjúfanlegur hluti alls skólastarfs.

Orðið „curriculum“ innheldur í raun þrjú hugtök: námskrá, námskrárgerð og námskrárfræði. Andri Ísaksson (1983) skilgreindi þessi þrjú atriði á eftirfarandi hátt:

- Námskrá: Áætlun eða leiðarvísir um hvað skuli gert í skólanum, þ.e. hvað skuli kenna þar og hvað nemendur eigi að læra.
- Námskrárgerð: samning og endurskoðun á námskrá, þ.e. nánar tiltekið þróun námskrár með það fyrir augum að stuðla að betra uppeldi og menntun.
- Námskrárfræði: Sú grein uppeldisvísinda sem liggur námskrárgerð til grundvallar.

Þessar skilgreiningar eru nokkuð almennar en Andri fjallar nánar um þessi hugtök í grein sinni Námskrárgerð og námskrárfræði. Segja má að kennsla sé í vissum skilningi list. Það sem kennarinn og listamaðurinn hafa

sameiginlegt er áhuginn og getan til að framkvæma tiltekið verk á sinn einstaka hátt. Enginn verður listamaður af engu og listamaðurinn þarf að skilgreina á sinn hátt hvert hann ætlar að stefna með verki sínu eða hvaða viðfangsefni hann er að túlka. Það sama má segja um námskrár, þær eru ramminn utan um það hvað eigi að kenna, hverjum skuli kenna og hvernig skuli meta árangurinn. Andri nefnir fimm meginkosti þess að vinna góðar námskrár:

- Námskrá beinir sjónum að markmiðum.
- Námskrá stuðlar að skilvirku starfi í þeim skilningi að hún hjálpar kennurum að sjá fyrir hugsanleg vandkvæði sem bregðast má við ef þau koma upp.
- Námskrá leiðir til sparnaðar á tíma og orku því hún dregur úr líkum á því að hjakkað sé í sama farinu.
- Námskrá auðveldar samræmingu á markmiðum og öðru sem þarf að gera.
- Námskrá dregur úr streitu. Rannsóknir hafa sýnt að vel undirbúin kennsla veldur mun minni streitu en illa undirbúin kennsla.

Margir námskrárfraeðingar tala um þrískiptingu námskráa. Með þrískiptri námskrá er í fyrsta lagi átt við hina skipulögðu námskrá sem er oft menntastefna yfirvalda. Í öðru lagi er átt við námskrá í framkvæmd sem er þá raunveruleg kennsla og sjónarmið kennarans. Að lokum er það svo hin skynjaða námskrá sem er sjónarmið nemandans og það hverju námskráin og kennslan skilar til nemandans.

Jeremy Kilpatrick (2009) er einn þeirra sem hefur skrifað um mikilvægi þess að kennarar komi að námskrárgerð í stærðfræði. Hann segir að hin algenga þrískipting námskráa geri ráð fyrir of mikilli þrepaskiptingu. Hann bendir á að námskrárgerð sé ekki línulegt ferli sem byrji hjá yfirvöldum og endi hjá nemandanum; námskráin hljóti að vera blanda markmiða, innihalds, kennslu, námsmats og kennsluefnis og ekki fari vel á því að setja sjónarmið kennarans skör lægra en yfirvaldsins. Hin yfirlýsta námskrá yfirvalda hafi ekki tilætluð áhrif nema hún sé einnig hluti af hinni skynjuðu námskrá og skili sér alla leið til nemandans. Námskrárgerð sé því ferli sem eigi að vera hægt að hafa áhrif á hvar sem er í áðurnefndum þrepastiga.

Eigindleg rannsókn, sem Sigfríður Guðný Theodórsdóttir (2010) gerði meðal íslenskra framhaldsskólakennara, benti til þess að kennurum þætti vera gjá milli þeirra sem stóðu að námskrárbreytingunum í stærðfræði 1999 og almenn óánægja væri meðal þeirra, bæði með innihald námskrárinnar og það námsefni sem gefið var út á íslensku og fylgdi í kjölfarið.

2.2 Val út frá áhuga höfundar

Eftir að hafa fengið þá hugmynd að nota margmiðlun til námsefnisgerðar í stærðfræði varð mér ljóst að ég þyrfti að afmarka námsefnið við ákveðna námseiningu. Ákveðið var því að afmarka efnið við tiltekin námsatriði sem venjulega eru kennd innan sama áfanga í framhaldsskólum landsins. Til þess að vera sáttur við eigið efnisval í áfangann varð ég að uppfylla ýmis skilyrði, bæði þau sem eru tilgreind í aðalnámskrá framhaldsskólanna og einnig vildi ég að námsefnið félli vel að starfskenningu minni sem verðandi kennari og hugmyndum mínum um námskrárgerð. Segja má að ég hafi því gefið mér ákveðið frelsi til þess að velja og hafna einstaka efnisþáttum en halda mig þó innan ramma aðalnámskrár.

Eitt af mínum áhugamálum er námsefnisgerð með forriti sem heitir GeoGebra. Það forrit hefur ýmsa kosti bæði til kennslu og námsefnisgerðar. Heitið GeoGebra er samsett úr enska orðinu „geometry“, sem merkir rúmfræði og orðinu algebra. Eitt af því sem ég var ákveðinn í að nýta mér var hve þægilegt er að teikna flatarmyndir í forritinu og gæða þær gagnvirkum eiginleikum. Með því móti getur nemandinn lært og séð með eigin augum hvernig hinar ýmsu breytur geta haft áhrif á myndsmíðarnar. Auðvelt er að nota forritið til þess að breyta eiginleikum hluta án þess að þurfa teikna þá upp á nýtt. Til dæmis er hægt að breyta þríhyrningi með því einu að færa til hornpunkta hans með músinni og fylgjast með breytingum sem verða á hliðarlengdum, hornum og flatarmáli svo eitthvað sé nefnt. Sé nemandinn athugull, forvitinn og leitandi getur hann oft lært verulega mikið af slíkum tilraunum. Þetta væri mjög erfitt að sýna á sjónrænan hátt án gagnvirks forrits því það myndi krefjast gríðarlega margra teikninga í höndunum sem gætu auk þess varla orðið eins nákvæmar og snyrtilegar og þegar þær koma fram á gagnvirkan hátt í forriti.

Eftir að hafa hugleitt hvar áhugi minn lægi og hvernig ég gæti nýtt margmiðlun og þekkingu mína nemendum til hagsbóta fannst mér gagnvirkar flatarmyndir einna áhugaverðastar. Norma Presmeg (2006) fjallar um hve nemendur eru oft tregir til að nota myndir og aðra sjónsköpun við stærðfræðináms. Hún vitnar í rannsókn Stylianou (2001) á skynjun og notkun sjónsköpunar hjá stærðfræðingum og nemendum á fyrsta stigi háskólanáms. Niðurstaða Stylianou er sú að bæði kennurum og nemendum finnst sjónræn framsetning gagnleg til að skilja og leysa ýmis stærðfræðileg vandamál en hafa litla þjálfun í því að skapa hana sjálfir.

Hlín Ágústsdóttir (2011) gerði rannsókn í íslenskum skóla sem benti til þess að nemendur teldu myndræna framsetningu hjálpa en gerðu lítið af því að teikna sjálfir myndir. Þetta rímar ágætlega við umfjöllun Presmeg. Rétt er

að taka fram að rannsókn Hlínar er eigindleg og studdist hún við mjög lítið úrtak. Segja má að þetta meistaraverkefni sé viðleitni mín sem námsefnishöfundar til að hjálpa nemendum við sjónræna sköpun í þeim tilgangi að ýta undir skilning þeirra.

Í aðalnámskrá framhaldsskólanna frá 1999 voru staðlaðar áfangalýsingar fyrir einstaka stærðfræðiáfangi. Mér varð ljóst að það voru einkum áfangarnir STÆ122 og STÆ303 sem féllu að áður nefndu áhugasviði. Áfanginn STÆ122 er evklíðsk rúmfræði, en Stæ303 fjallar að mestu um vigra og hornaföll. Árið 1993 skrifaði ég kennslubók um flatarmyndir, sem ber heitið Valtarinn, en hef ekki áður fengist við skriftir eða annað tengt námsefnisgerð fyrir áfangann Stæ303. Valtarinn var gefinn út og notaður í nokkrum grunnskólum. Ég var aðeins 19 ára að aldri og var að láta drauma mína rætast að skrifa kennslubók um áhugasvið mitt.

Þegar þessi greinargerð er rituð eiga sér stað töluverðar breytingar á námskrá margra framhaldsskóla. Námsefnið, sem tilheyrði STÆ122, er kennt á mjög ólíkan hátt í mismunandi framhaldsskólum. Það sem hér er átt við er að misjafnt er eftir skólum hvort þeir kenni nemendum námsefni um flatarmyndir í sérstökum áfanga eða hvort það efni sé hluti af fjölbreyttari heild. Í þeim tilfellum, sem efnið um flatarmyndir er ekki í sérstökum áfanga, er einnig breytilegt milli skóla hvað er kennt samhliða flatarmyndunum í viðkomandi áfanga.

Áfanginn, sem hét áður STÆ303, virðist vera einsleitari innan skólakerfisins heldur en evklíðska rúmfræðin. Ástæðan er líklega sú að auðvelt er að mynda efnislega samfellda heild úr vigrum og hornaföllum. Að auki má benda á að eðlisfræðin notar bæði vigra og hornaföll og það strax í fyrsta áfanga. Ef námsefni um vigra og hornaföll yrði aðskilið hvort frá öðru myndi það flækja undirbúning þeirra nemenda sem vilja eða þurfa að læra eðlisfræði. Í ljósi þess hve miklu stöðugri áfanginn STÆ303 hefur verið hvað varðar námskrárbreytingar varð niðurstaðan því að hanna námsefni fyrir vigra og hornaföll.

Að lokum vil ég nefna að áður nefndur áfangi, Stæ303, hefur ákveðna sérstöðu í skólakerfinu. Hann er í raun fyrsti áfanginn sem er yfirleitt skylda á náttúrufræðibrautum skólanna án þess að vera það endilega á öllum öðrum brautum. Í gamla kerfinu, eins og það var sett upp í námskránni frá 1999, var algengast að áfangarnir STÆ103 og STÆ203 væru sameiginlegur grunnur flestra nemenda en eftir það fóru leiðir að skiljast eftir námsbrautum og áhugasviði hvers og eins. Þeir sem voru á náttúrufræðibrautum tóku þennan áfanga sem hluta af skyldunámi sínu en sumar námsbrautir voru þannig uppbyggðar að ýmist var látið gott heita

eftir STÆ203 eða nemendur tóku einhverja aðra áfanga eins og t.d. Stæ363 eða STÆ313. Nemendur gátu í raun valið námsbraut eftir því hvort þeir vildu taka námsefni um vigra og hornaföll eða sleppa við það.

2.3 Um stærðfræði í Aðalnámskrá framhaldsskóla: Almennum hluta 2011

Samkvæmt lögum um framhaldsskóla nr. 92/2008 er ábyrgðinni af gerð námskrár og vali námsefnis í einstaka áfanga færð meira til framhaldsskólanna sjálfra heldur en áður var (Mennta- og menningarmálaráðuneytið, 2011). Þetta þýðir að ef ákveðnum skilyrðum ráðuneytisins er fylgt þá geta einstakir skólar búið til sínar eigin námsbrautir og námsáfanga. Um ástæður þessara breytinga segir orðrétt í aðalnámskrá framhaldsskólanna frá 2011:

Samkvæmt lögum um framhaldsskóla nr. 92/2008, færast ábyrgð á námskrárgerð í auknum mæli til framhaldsskólanna. Þeim er nú falið að gera tillögur um fyrirkomulag, samhengi og inntak náms í samræmi við viðmið, sniðmát og reglur um gerð námsbrautarlýsinga. Með þessu er framhaldsskólum gefið aukið umboð til að byggja upp nám sem tekur mið af sérstöðu skóla, þörfum nemenda, nærsamfélags og atvinnulífs. Þetta skipulag á jafnframt að veita skólum tækifæri til að bregðast markvisst við þörfum nemenda, samfélags og atvinnulífs, niðurstöðum rannsókna og gæðaeftirlits. Tillögur um námsbrautir þurfa staðfestingu ráðuneytis til að verða hluti af aðalnámskrá framhaldsskóla.

(Aðalnámskrá framhaldsskóla: Almennur hluti, 2011, bls. 7)

Að mínu mati er margt jákvætt við þessar breytingar. Dregið er nokkuð úr miðstýringu í námskrárgerð. Skólarnir eru að vísu háðir samþykki ráðuneytisins eftir að þeir hafa gert sínar tillögur að námsbrautum en þetta gefur stærðfræðikennurum og stjórnendum skólanna tækifæri til að endurskoða einstaka stærðfræðiáfanga eða jafnvel allt stærðfræðinámið. Þessi vinnubrögð ríma ágætlega við gagnrýni Kilpatrick áþrepaskiptingu námskráa sem komið hefur verið inn á.

Ég er almennt fylgjandi því að nemendur læri stærðfræði í framhaldsskólum en hins vegar finnst mér fráleitt að allir nemendur læri endilega sömu stærðfræðina. Rök mín fyrir þeirri skoðun eru þau að í fyrsta

lagi eru þarfir nemenda misjafnar hvað varðar undirbúning fyrir frekara nám. Í öðru lagi getur nemenda gengið vel í tilteknu námsefni en verr í öðru. Þótt ég trúi því að allir nemendur geti lært stærðfræði (ýmist með eða án stuðnings) tel ég að æskilegt sé að nýta styrkleika hvers og eins, einkum og sér í lagi þegar litið er til þess að skólinn á að vera fyrir alla.

Margir hafa þó gagnrýnt þessar breytingar harðlega og benda á að kennarar hafi nóg á sinni könnu. Ekki sé hægt að ætlast til þess að þeir vinni mikið við námskrárgerð þar sem þeir þurfi á öllum sínum tíma og kröftum að halda við undirbúning og kennslu inni í sjálfri skólafestunni.

Mér fannst óþarfi að umbylta kerfinu algjörlega, enda yfirleitt best að innleiða breytingar í skrefum. Ég las hins vegar áfangalýsingu fyrir áfangann STÆ303 í Aðalnámskrá framhaldsskóla: Almennum hluta 1999 en ekki hefur verið gerð sérstök námskrá fyrir einstakar greinar síðan þá. Ég tók þann áfanga til endurskoðunar og við val efnispáttu reyndi ég að hafa eftirfarandi atriði í huga:

- Námsseiningin þarf að innihalda námpætti sem tengjast sem mest innbyrðis í þeim tilgangi að gera þekkingu nemenda heilsteypta en að hún sé ekki í sundurlausum brotum.
- Námsseiningin skal í grunninn byggja á námskránni frá 1999 en endurskoðast í samræmi við starfskenningu mína sem kennara og hugmyndir mínar um forgangsröðun í efnisvali.
- Nýja námskráin frá 2011 horfir meira til almennrar menntunar en til einstakra greina og megináhersla er lögð á ákveðna grunnþætti menntunar í hugmyndafræði hennar. Hafa skal í huga að stærðfræði er bæði sjálfstæð fræðigrein og hluti af almennri menntun.
- Allri talningarfræði er sleppt. Hugtökin hornaföll og vigrar eru rækilega skyld innbyrðis en sama er ekki hægt að segja um talningarfræði.

Því má segja að verkefnið sé í raun bæði námsefnisgerð og óformleg námskrárgerð. Ávinningur verkefnisins fyrir skólakerfið er fólgin í því að verið er auka framboð á rafrænu námsefni byggðu á íslenskum námskrám.

Í nýjustu aðalnámskrá framhaldsskólanna frá 2011 er fjallað um hæfniviðmið fyrir kjarnagreinarnar í viðauka 3. Kjarnagreinum er skipt í þrjá flokka og eru þeir íslenska, stærðfræði en síðasti flokkurinn nefnist enska og önnur erlend mál. Hvað stærðfræðiþáttinn varðar er þessi viðauki að mínu mati ekkert sérstaklega leiðbeinandi varðandi val á einstökum efnispáttum fyrir tiltekna áfanga eins og hér um ræðir. Þar er fjallað um þekkingar-, leikni- og hæfniþætti á fjórum hæfniþrepum. Hins vegar er talað um

áðurnefnda þætti á mjög almennan hátt og lítið sem ekkert minnst á einstaka tæknilega námsþætti. Til dæmis kemur orðið vigur hvergi fyrir í viðaukanum. Í áðurnefndum viðauka er bent á að ekki sé ætlast til þess að öllum þekkingar-, leikni- og hæfnipáttum verði náð á hverju þrepi heldur skuli vinna með þá námsþætti sem undirbyggja hæfniviðmið einstakra námsbrauta. Samt sem áður eru tilgreindir þekkingarþættir í fjórum þrepum sem eru mjög almenns eðlis. Ég dreg því þá ályktun að hlutverk viðaukans sé frekar að fjalla um það hvert sé hlutverk stærðfræðinnar í almennri menntun en engan veginn að vera til leiðsagnar um það hvað skuli kenna í hverjum áfanga fyrir sig og þaðan af síður hverjum skuli kennt. Sökum þess hve lítið er fjallað um einstaka efnisþætti í nýjustu námskránni þá studdist ég einna helst við aðalnámskrá framhaldsskólanna í stærðfræði frá 1999.

2.4 Tengsl námsefnis vefsins við Aðalnámskrá framhaldsskóla: Almennan hluta 1999

Eins og áður hefur verið komið inn á er námsefnisvalið endurskoðuð útgáfa mín af áfanganum Stæ303 eins og hann birtist árið 1999 í aðalnámskrá framhaldsskólanna. Í þeirri námskrá stendur að aðalinntak áfangans sé vigrar og hornaföll, tengsl algebru og rúmfræði í hnitakerfi auk kynningar á talningarfræði. Það sama má segja um það inntak námsefnisins, sem ég bjó til að stærstum hluta, nema hvað ég sleppi talningarfræðinni.

Vigrar eru í eðli sínu rúmfræðilegt hugtak sem segja má að sé grundvallarhugtak í línulegri algebru. Þeir eru bæði notaðir og túlkaðir rúmfræðilega í ýmsum öðrum greinum svo sem eðlisfræði og tölvunarfræði, svo fátt eitt sé nefnt, en notagildi þeirra er verulegt bæði í hinum akademíska heimi og í daglegu lífi. Þó svo að fjalla megi um vigra á mjög formlegan hátt út frá hreinni stærðfræði og forsendum hennar, eins og t.d. vigurrúmum og grúpum, þá er einfalt að skilgreina vigur á þann hátt að það dugi leikmanni til þess að átta sig nokkurn veginn á um hvað ræðir. Segja má að vigur sé einfaldlega strik með stefnu (Bjørnsgård og Erstad 1991). Í raun er ómögulegt að kenna sumar fræðigreinar án þess að nota vigra eða þekkja til eiginleika þeirra. Þar sem bæði lengd og stefna eru lykileiginleikar vigra henta þeir mun betur en venjulegar rauntölur til að fjalla um mörg mikilvæg viðfangsefni.

Til dæmis yrði umræða um veðrið ómöguleg ef eingöngu væri talað um vindstyrk en aldrei vindátt. Í eðlisfræði og hagnýtingu hennar eru margar af lykilstærðunum vigrar eins og t.d. hraði, hröðun, kraftur, vegalengd svo eitthvað sé nefnt. Ef við tökum jafn hversdagslegan hlut eins og bifreið sem dæmi þá er ómögulegt að fjalla um atvik eins og hemlunarkraft,

stefnubreytingu með stýrinu, hraða eða hröðun nema með því að nota vigra. Þó að kraftar séu ekki sýnilegir mannsauganu eru afleiðingar þeirra það oft. Túlka má þessa hluti með teikningum og þar með túlka þá rúmfræðilega með mismikilli einföldun.

Sömu sögu mætti segja um hornaföll. Þó að hin hreina stærðfræði fjalli oft um hornaföll út frá veldaröðum er það yfirleitt ekki sú nálgun sem beitt er í framhaldsskólum. Í námsefni framhaldsskólanna eru hornaföll oftast skilgreind með rúmfræðilegum aðferðum og eru þá aðalhugtök hringur, horn og hnit punkts höfð til grundvallar. Hornaföll og vigrar tengjast mjög sterkum böndum og algengt er að vigrar séu notaðir í umfjöllun um hornaföll og öfugt.

Í kennslu vigra er yfirleitt byrjað á því að kynna eiginleika og notkun þeirra í fleti eða plani. Oft er þó mikilvægt að horfa á vigra í þrívídd og getum við nefnt flugumferðastjórn í því sambandi. Vigrar geta verið skilgreindir af hvaða vídd sem er þótt erfiðara sé að gefa því rúmfræðilega merkingu þegar víddirnar eru orðnar fjórar eða fleiri. Viðfangsefni þessarar námseiningar er þó bundið eingöngu við hornaföll og vigra í fleti og sér í lagi í hnitakerfinu sem er í raun aðeins staðsetningartæki í gefnum fleti.

Auk vigra, hornafalla og tengingar rúmfræði og algebru í hnitakerfinu nefnir aðalnámskráin frá 1999 talningarfræði sem stóran þátt í áfanganum STÆ303. Hvers vegna það var gert veit ég ekki. Að mínu mati er talningarfræði ekkert minna hagnýt en vigrar og hornaföll en í raun á allt öðrum vettvangi. Ég er þeirrar skoðunar að nauðsynlegt sé að námsefni í stærðfræði byggji sem mest á fræðilegri heild til þess að auðvelda nemandanum að sjá hlutina í samhengi og svo hægt verði að læra efnið og fá heildræna en ekki sundurlausa þekkingu. Til að gera langa sögu stutta þá eru vigrar og hornaföll þungamiðja gamla áfangans STÆ303 en annað námsefni er eingöngu til uppfyllingar enda hefur yrðingarökfræði og talningarfræði lítil tengsl við vigra og hornaföll.

Hvað vigra og hornaföll varðar þá eru tilgreind ýmis hæfniviðmið í námskránni frá 1999 sem eru skilgreind skilmerkilega og líklega samin af stærðfræðikennurum eða stærðfræðingum. Vefurinn og verkefnabókin, sem þetta verkefni inniheldur, spannar flest ef ekki öll þau hæfniviðmið. Auk þess inniheldur námsefnið fræðslu um snúning mynda eða annarra hluta um punkt. Ég mun fjalla um hæfniviðmið tengd námsefninu síðar í þessari greinargerð.

2.5 Innihald námsefnisins og kaflaskiptingar þess

Námsvefurinn inniheldur fjóra kafla eða hluta. Verkefnasafnið er pdf-skjal sem inniheldur fjóra kafla byggða á ákveðinni flokkun verkefna sem nánar verður útlustuð síðar í greinargerðinni. Vefurinn inniheldur fjölda kennsluvídeóa en þeim er einnig skipt á fjórar vefsíður. Fyrsta vefsíðan í þeim flokki er í raun nefnd kafla 1 vegna þess að tilgangurinn með henni er að kenna nemandanum þau fræði sem hann þarf að kynnast til þess að geta tekist á við verkefnin úr kafla 1 í verkefnabókinni. Sambærilegt flokkunarkerfi er svo á köflum 2, 3 og 4. Að auki setti ég mér þá stefnu að röðun vídeóanna innan hvers kafla væri í samræmi við röðun námsmarkmiða innan verkefnasafnsins.

Ég reyndi að raða vídeó fyrirlestrunum eftir samhengi þeirra og innbyrðis tengslum. Einnig reyndi ég að hafa nokkurn veginn svipaðan fjölda vídeóa í hverjum kafla. Að auki var ég háður því að fjalla ekki um neitt nema undanfari þess hefði verið kynntur þegar það átti við.

2.5.1 Kafli 1

Kafli 1 inniheldur námsefni um vigra. Tilgangurinn með þeim kafla er að kynna vigrum sem algjört grundvallarhugtak í áfanganum og gera það án þess að gera ráð fyrir neinni forkunnáttu nemenda í hornaföllum. Í kaflanum er fjallað um öll helstu hugtök tengd vigrum að innfeldi undanskildu. Ástæðan er sú að skilgreiningin, sem ég styðst við á innfeldi, felur í sér notkun hornafalla en um þau er ekki fjallað fyrr en í kafla 2. Hér á eftir eru heiti vídeóanna útlustuð en nánari innihaldslýsingar þeirra eru á vefnum.

1. Vigrar, eiginleikar og reglur
2. Vigrar í hnitakerfinu
3. Lengd vigurs
4. Blandað margfeldi
5. Samsíða vigrar
6. Horn milli tveggja vigra
7. Liðun vigurs
8. Miðpunktur striks
9. Samsíðungar
10. Þyngdarpunktur þríhyrnings

2.5.2 Kafli 2

Kafli 2 fjallar um hornaföll og innfeldi. Markmiðið með þeim kafla er að veita nemendum góða innsýn í hvað er átt við með hornaföllunum cósínus, sínus og tangens. Kaflinn byrjar á vídeó sem er eflaust upprifjun fyrir marga, og fjallar um notkun hornafalla í rétthyrndum þríhyrningum. Slík umfjöllun er reyndar ekki almenn umfjöllun um hornaföll því hún einskorðast við notagildi þeirra í rétthyrndum þríhyrningi. Ákveðið var að hafa þetta vídeó í öðrum kafla vegna þess að merkingarsköpun nemenda á námsefninu gæti orðið þeim erfiðara ef hún er ekki tengd fyrri reynslu þeirra. Hornaföll og hagnýting þeirra í þríhyrningum er þó ekki aðalviðfangsefni kafla 2 heldur fjallar kafli 3 um þá hluti sérstaklega.

Það er útbreiddur misskilningur að hornaföll séu aðeins notuð á horn. Staðreyndin er sú að hornaföll eru stundum notuð á hagnýtan þátt þótt horn komi þar hvergi nærri. Dæmi um slíkt er þegar hornaföll eru notuð til þess að tákna bylgjur, t.d. í eðlisfræði og víðar. Nauðsynlegt er að nemendur viti að gráðuhugtakið er í raun mælieining en ef notað er svokallað bogamál horns er hægt að túlka bæði horn og aðrar stærðir sem rauntölu sem er ekki háð neinni einingu. Af þeirri ástæðu er nemendum kennt að nota bogamál horns og þeim kennt að umreikna gráðutölu horns yfir í bogamál og einnig að gera öfuga aðgerð í kaflanum.

Ég tel það algjört lykilatriði að lögð sé ofuráhersla á skilgreiningu hornafallanna út frá einingahringnum. Sé nemandi ekki meðvitaður um merkingu hornafalla út frá einingahringnum er líklega mjög erfitt að beita nokkurri röksemdafærslu í kennslu hornafalla þannig að hún leiði til einhvers skilnings. Ég hef kynnst mörgum nemendum sem hvorki skilja skilgreininguna né gera sér grein fyrir því að nánast allur áfanginn hvílir á henni. Ég tek það fram í innihaldslýsingu vídeósins á vefnum að ég telji það vera eitt það allra mikilvægasta í áfanganum fyrir frekari skilning. Vídeóíð Nokkrar umritanir hornafalla inniheldur helstu umritanir sem aðalnámskráin frá 1999 mælist til að nemendur kynnist. Kaflinn endar svo á þremur vídeóum um innfeldi. Hér á eftir má sjá heiti vídeóanna en innhaldslýsing þeirra er á vefnum.

1. Hornaföll í rétthyrndum þríhyrningum
2. Bogamál horns
3. Nokkur nákvæm gildi hornafalla
4. Almenn skilgreining á cósínus og sínus
5. Almenn skilgreining á tangens
6. Ýmsar reglur og umritanir hornafalla
7. Vigur út frá lengd og stefnuhorni

8. Mynd snúið um punkt
9. Innfeldi
10. Innfeldi í hnitakerfinu
11. Hornréttir vigrar

2.5.3 Kafli 3

Í kafla 3 er málið einfalt. Hann inniheldur allt sem tengir saman hornaföll og hagnýtingu þeirra í þríhyrningum. Hugsanlega eru fyrstu vídeóin einungis upprifjun fyrir marga og það er í fínu lagi. Allir hafa gott af upprifjun. Eins og áður hefur komið fram hafa margir kynnst hornaföllum í rétthyrndum þríhyrningum áður en til þessa áfanga kemur. Hvort sem menn kjósa að læra þetta námsefni aftur eða láta sína fyrri reynslu duga þá er fyrri reynsla nemenda gulls ígildi og sjálfsagt að tengja hana því sem hún tengist, nefnilega þríhyrningum í víðu samhengi. Að sjálfsögðu geta menn sleppt því sem þeir hafa lært áður kjósi þeir að gera svo. Fyrsta vídeóið sem heitir hornaföll í rétthyrndum þríhyrningum, er reyndar bæði í kafla 2 og 3. Ástæðan er sú að kafla 3 fjallar sérstaklega um þríhyrninga en vídeóið getur einnig verið inngangur að almennri umfjöllun um hornaföll. Auk þess er innihald þess oft það eina sem nemendur hafa lært um hornaföll áður en almennt nám um vigra og hornaföll hefst. Því var ákveðið að hafa vídeóið í báðum köflunum.

Kafli 3 er byggður upp þannig að þegar fjallað hefur verið um rétthyrnda þríhyrninga sérstaklega er tekin fyrir flatarmálsregla fyrir þríhyrninga auk sínusreglu og cósínusreglu sem almennari verkfæri og óháð því hvort þríhyrningarnir eru rétthyrndir eða ekki. Heiti vídeóanna koma hér á eftir en frekari innihaldslýsing þeirra er á vefnum.

1. Hornaföll í rétthyrndum þríhyrningum
2. Meira um hornaföll og andhverfur
3. Flatarmál þríhyrnings
4. Sínusregla (fyrri hluti)
5. Sínusregla (seinni hluti)
6. Cósínusregla

2.5.4 Kafli 4

Kafli 4 inniheldur ýmislegt hagnýtt um hornaföll sem ýmist var ekki pláss fyrir í kafla 2 eða þá að innfeldi var notað við útleiðslu, kennslu eða sönnun en innfeldi er í lok kafla 2. Meðal námsefnis eru summuformúlur fyrir sínus og cósínus, gröf hornafalla og jöfnur sem innihalda hornaföll. Heiti vídeóanna koma hér á eftir en innihaldslýsingar þeirra eru á vefnum.

1. Cósínus af mismun og summu tveggja horna
2. Cósínus og sínus lagshorna
3. Sínus af mismun og summu tveggja horna.
4. Cósínus og sínus af tvöföldum hornum.
5. Grunnjöfnur hornafallanna \cos og \sin
6. Grunnjafna með \tan
7. Gröf cósínus- og sínusfalla
8. Graf tangensfallsins
9. Meira um jöfnur með cósínus
10. Meira um jöfnur með sínus
11. Tengsl hornafalla við 2. stigs margliðu
Jöfnur af gerðinni $a \cos x + b \sin x = c$

2.6 Markmið og hæfniviðmið áfangans

Markmiðin með þessu námsefni og kennslu þess eru mörg. Ég kaus að skipta þeim í tvo flokka sem þó geta ef til vill skarast. Í fyrsta lagi eru hin almennu markmið en með þeim er átt við að stærðfræði sé hluti af almennri menntun og nota ég grunnþættina eins og um þá er fjallað í Aðalnámskrá framhaldsskóla: Almennum hluta 2011 sem vörður til að fylgja við skilgreiningu markmiðanna. Í öðru lagi eru sértæk markmið sem fela í sér að nemendur læri ákveðin tæknileg atriði sem tengjast vigrum og hornaföllum.

2.6.1 Almenn markmið og grunnþættir

Í mínum huga er meginmarkmið með öllum stærðfræðiáföngum að nemendur skapi skilgreiningum, hugtökum og reglum merkingu. Með öðrum orðum: stærðfræði er merkingarsköpun. Nemendur læra skilgreiningar sem eru verkfæri til þess að hægt sé að útskýra tilgang og eiginleika ákveðinna hugtaka. Hafi skilgreiningarnar og önnur hugtök ekki neina merkingu í huga námsmannsins eru þær í raun harla gagnslausar og mætti þá líkja námi nemandans við ökunám án þess að vita hvað bíll er. Í stóra samhenginu gengur þá stærðfræðinámið út á að nemendur skilji hvað þeir eru að læra, hvaða eiginleika verið er að fjalla um og að þessir hlutir tengist með tímanum lífsreynslu eða hugmyndum nemendanna sjálfra.

Skilningur nemandans er algjör forsenda þess að hann geti tekið rökstudda ákvörðun um það hvaða leið hann vill fara að settu marki. Skilji nemandinn ekki hlutina vegna þess að merkingu þeirra vantar getur hann ekki beitt gagnrýnni hugsun.

Fræðimenn og aðra hefur greint á um hvort hægt sé að kenna gagnrýna hugsun. Þessu er ómögulegt svara fullkomlega enda hefur þessi spurning verið útgangspunktur margra doktorsritgerða í heimspeki. Í sannleika sagt erum við mennirnir ekki alltaf of mikið fyrir gagnrýna hugsun og í raun getum við ekki sýnt gagnrýna hugsun á öllum sviðum mannlífsins. Þegar gagnrýna hugsun vantar er alltaf hætt á því að menn fari fordómaleiðina, þrjóskeyðina eða kennivaldsleiðina. Fordómaleiðin felur í sér að fólk dregur ályktun út frá því sem það þekkir ekki og kynnir sér ekki heldur. Þrjóskeyðin einkennist af því að fólk þykist alltaf vita best og lætur sér ekki segjast. Kennivaldsleiðin er byggð á þeirri ranghugmynd að kennarinn eða yfirvöld viti allt og leiðin að markinu sé aðeins ein og það sé sú leið sem kennarinn fer (Páll Skúlason, 1987).

Eftirfarandi ranghugmyndir um stærðfræði eiga upptök sín í fordóma-þrjóskeyð og kennivaldsleiðinni:

- Stærðfræðidæmi hafa alltaf nákvæmlega eina rétta lausn. Við sérhverju stærðfræðidæmi er bara til ein rétt lausnaraðferð og venjulega er það aðferðin sem kennarinn er nýbúinn að sýna bekknum.
- Iðkun stærðfræði fer alltaf fram í einrúmi og stærðfræðingar vinna ekki með öðru fólk.
- Stærðfræði, sem kennd er í skólum, hefur lítil sem engin tengsl við daglegt líf.
- Formleg sönnun er óviðeigandi tæki náms eða uppgötvana. (Solomon, 2009).

Ég tel að stærðfræðinámi sé mjög gott þjálfunartæki hvað varðar grunnþættina læsi og sköpun og hefur því mikið hagnýtt gildi hvað varðar almenna menntun. Þegar nemendur leysa verkefni í stærðfræði reynir á læsi þeirra á þær upplýsingar sem gefnar eru í dæminu. Einnig þarf gagnrýna hugsun svo að nemendur geti tekið upplýsta afstöðu um sanngildi fullyrðinga almennt séð. Í stærðfræði er oft notað sérstakt tungutak auk þess sem ritmál í stærðfræði einkennist oft af táknmáli sem er nemendum framandi. Það fer því fram mikil þjálfun í læsi í víðum samhengi þegar stærðfræðilegum texta er fundin merking og eitthvað skapað úr honum. Í stærðfræðilegum verkefnum þarf einnig greiningarhæfni til þess að leggja mat á það hvað í textanum skiptir máli við úrlausnina og með hvaða hætti, í raun að greina kjarnann frá hisminu.

Sköpun er að mínu mati mikilvæg í öllu stærðfræðinámi. Til þess að finna hjá sér þörf til að leysa verkefni þarf forvitni, gagnrýna hugsun og getu til að

ljá gefnum upplýsingum einhverja merkingu. Þegar nemendur glíma við verkefni þurfa þeir oft að beita aðferðum og hugmyndum sem eru þeim ýmist vel kunnug eða algjörlega ný. Nemendur hugsa þá út fyrir kassann, ef svo mætti segja. Í öllu sköpunarferli er allt ferlið mikilvægt en ekki einungis afurðin. Það sama má segja um lausnarferli á stærðfræðiverkefni, þar er niðurstaðan afurðin en röksemdafærslan og leitin að hönnun lausnarinnar algjör forsenda þess að sjálf afurðin verði til. Eitt af yfirmarkmiðunum með stærðfræðikennslu ætti því klárlega að vera að gera nemendur hæfa til þess að fjalla um lausnarferli sitt bæði munnlega og skriflega.

Hvað grunnþáttinn lýðræði varðar þá stuðlar þjálfun í gagnrýnni hugsun að því að einstaklingurinn verði betur í stakk búinn til að taka upplýsta ákvörðun um einstök mál eða málefni og á það jafnt við um samfélagsleg málefni eða fræðigreinar. Ekki er alltaf mögulegt að byggja ákvarðanir sínar á upplýsingum en þegar það er mögulegt er mjög gott að hafa reynslu af því að greina upplýsingar og skapa eitthvað hagnýtt úr þeim og þarna er hlutverk stærðfræðinnar mikilvægt. Einnig mætti nefna að stærðfræði er í raun sameiginleg eign allra jarðarbúa og því getur hver sem er tekið þátt í þróun hennar.

Ég hef nú farið um nokkuð víðan völl í umfjöllun minni um aðalmarkmið og grunnþætti menntunar. Rauði þráðurinn í þessu öllu saman er sá að stærðfræðinám sé þjálfun í merkingarsköpun upplýsinga byggð á vandaðri rökhusun, innsæi og sköpunargleði. Nemendur geta svo skapað hugtökunum merkingu með ýmsum hætti, svo sem með því að skoða skýringarmyndir, tengja þau persónulegri reynslu sinni, með uppgötvunarnámi og þannig mætti lengi telja.

2.6.2 Sértek hæfniviðmið náms um vigra og hornaföll

Ég hef nú þegar fjallað um almenn markmið með stærðfræðikennslu sem hluta af almennri menntun. Staðreyndin er sú að bæði stærðfræði og aðrar greinar krefjast þess oft að nemendur geti náð tókum á afmörkuðum atriðum, eins og t.d. að nemendur geti liðað vigur í hornréttu liði til þess að geta fjallað um ýmis hugtök í eðlisfræði, svo eitthvað sé nefnt. Í raun er hverjum kennara það í sjálfsvald sett hvaða kröfur hann gerir um einstök hæfniviðmið í námsmati sínu eða hvernig hann kynnir þau í kennsluáætlun. Samt sem áður vil ég nefna nokkur tæknileg atriði sem kennarar og nemendur geta notað sem vörður á námsleiðinni og eru þau helstu hér fyrir neðan þó að sá listi sé ekki tæmandi.

2.6.2.1 Hæfniviðmið fyrir kafla 1

- Að nemendur þekki skilgreiningu og eiginleika vigra í plani með eða án hnitakerfisins.
- Að nemendur þekki bæði eiginlegan vigur og núllvigur.
- Að nemendur þekki samlagningu og frádrátt vigra og geti túlkað það bæði með reikningi og myndrænt.
- Að nemendur þekki blandað margfeldi og tengsl þess við samsíða vigra.
- Að nemendur kynnist hugtökum eins og lengd vigurs og stefnuhorn vigurs.
- Að nemendur geti liðað vigur eftir tveimur ósamsíða vigrum.
- Að nemendur læri um notagildi vigra í rúmfræði, m.a. í tengslum við samsíðunga, miðpunkt striks og við að finna þyngdarpunkt þríhyrnings.

2.6.2.2 Hæfniviðmið fyrir kafla 2

- Að nemendur geti skilgreint hornaföllin \cos , \sin og \tan bæði í réttthyrndum þríhyrningum og almennt.
- Að nemendur viti hvað bogamál horns er og geti umreiknað bogamál horns yfir í gráður og öfugt.
- Að nemendur kynnist útleiðslu á nákvæmum gildum hornafalla fyrir algengar stærðir eins og 30, 45 og 60 gráða horn.
- Að nemendur kynnist ýmsum umritunum hornafalla og geti sjálfir notað eiginleika einingahringsins við útleiðslu þeirra.
- Að nemendur geti notað lengd vigurs, stefnuhorn hans og hornaföll til þess að rita línulega samantekt hans út frá hornréttum einingavigrum.
- Að nemendur læri að skilgreina innfeldi og skapi því merkingu.
- Að nemendur læri reiknireglur fyrir innfeldi, m.a. í hnitakerfi.
- Að nemendur læri um eiginleika hornréttra vigra og tengsl þeirra við innfeldi.
- Að nemendur kynnist hugtakinu þvervigur.

2.6.2.3 Hæfniviðmið fyrir kafla 3

- Að nemendur geti notað hornaföll til þess að finna stærðir sem vantar í þríhyrning þegar gefið er að hann sé réttthyrndur.

- Að nemendur geti fundið flatarmál þríhyrnings með hjálp sínusfallsins þegar það á við.
- Að nemendur geti notað sínus- eða cósínusreglu til þess að finna stærðir í þríhyrningi, sem vantar, óháð því hvort hann sé rétthyrndur eða ekki.
- Að nemendur geti tekið rökstudda ákvörðun um það hvort sínus- eða cósínusregla henti betur í einstökum verkefnum.
- Að nemendur geti leitt út og sannað reglurnar í kaflanum.

2.6.2.4 Hæfniviðmið fyrir kafla 4

- Að nemendur geti notað reglur um cósínus af mismun eða summu tveggja horna.
- Að nemendur skilji reglur um cósínus eða sínus lagshorna.
- Að nemendur geti notað reglur um sínus af mismun eða summu tveggja horna.
- Að nemendur geti notað reglur um cósínus eða sínus af tvöföldum hornum.
- Að nemendur geti greint í sundur ýmsar gerðir einfaldra hornafallajafna og leyst þær.
- Að nemendur geti hagnýtt þekkingu á 2. stigs jöfnum við lausn á ákveðnum hornafallajöfnum.

Reynt var að hanna bæði verkefnasafnið og vídeóin með það fyrir augum að nemendur geti öðlast þessa hæfni eftir fjölbreyttum leiðum.

3 Hugleiðingar um stærðfræðikennslu

3.1 Um stærðfræðikennslu í framhaldsskólum

Stærðfræðikennsla er vandasamt starf sem margir kennarar sinna af hugsjón og metnaði. Ég held að umræður um stærðfræðikennslu, tilgang hennar og gæði séu nauðsynlegar. Ég er ekki talsmaður þess að breytingar séu gerðar í skólakerfinu einungis breytinganna vegna. Ég er heldur ekki talsmaður öfgafullrar íhaldssemi þar sem menn ríghalda í óbreytt ástand eingöngu af vana eða sterkri hefð. Í öllu skólastarfi þarf að meta það að verðleikum sem vel er gert en jafnframt er uppbyggileg gagnrýni nauðsynleg vegna þess að íslenska skólakerfið er klárlega ekki fullkomið.

Nýlega var gerð úttekt á stærðfræðikennslu í níu íslenskum framhaldsskólum og var hún unnin af sex stærðfræðingum sem allir hafa reynslu af því að taka við nemendum úr framhaldsskólum og kenna þeim svo í framhaldinu stærðfræði á háskólastigi. Helstu niðurstöðurnar eru eftirfarandi og eru þær teknar orðréttar úr áður nefndri skýrslu:

- Samráð um stærðfræðikennslu er lítið, annars vegar milli framhaldsskólanna innbyrðis og hins vegar milli grunnskólans og framhaldsskólans. Ennfremur er lítið samráð milli framhaldsskólastigsins og háskólastigsins.
- Skortur er á vönduðu kennsluefni í stærðfræði fyrir framhaldsskóla.
- Ekkert gæðaeftirlit er með kennsluefni sem notað er við stærðfræðikennslu í framhaldsskólum.
- Lítið eftirlit er með því hvort skólarnir sinni sínu hlutverki og nái settum markmiðum í stærðfræðikennslu.
- Menntun stærðfræðikennara er ábótavant.
- Endurmenntun kennara er illa sinnt.
- Nokkuð stór hópur nemenda kemur úr grunnskóla með ákaflega litla kunnáttu í stærðfræði.
- Nám í stærðfræði á þeim námsbrautum framhaldsskólans, sem krefjast lítillar stærðfræði, samræmist ekki lokamarkmiðum námsbrautanna.
- Fjölmarginir nemendur í framhaldsskólum vinna svo mikið með náminu að það skaðar námsárangur þeirra.
- Tölfræðinám í framhaldsskólum er almennt ekki gott.

- Mikill munur er á áföngum milli skóla bæði hvað snertir innihald og námskröfur.
- Á heildina litið eru framhaldsskólarnir fjarri því að uppfylla þær kröfur, sem settar eru fram í áfangalýsingum aðalnámskrár frá 1999 og hæfniprepum í aðalnámskrá frá 2011.
- Í mörgum tilvikum virðist áherslan vera á að nemendur læri tiltekna aðferðir við að leysa ákveðnar gerðir verkefna en stór hluti þeirra markmiða, sem sett eru fram í aðalnámskrá, gleymist (Anna Helga Jónsdóttir, Eggert Briem, Freyja Hreinsdóttir, Freyr Þórarinsson, Jón Ingólfur Magnússon og Rögnvaldur G. Möller, 2014)

Rétt er taka fram að ekki var gerð úttekt á kennslu vigra og hornafalla en hins vegar var gerð úttekt á kennslu nýnema í þessum framhaldsskólum auk áfangans STÆ503 sem í mörgum tilfellum er síðasti skylduáfanginn á náttúrufræðibrautum skólanna. Að mati skýrsluhöfunda er þó margt gott gert í framhaldsskólum landsins og vonandi er það rétt. Niðurstöðurnar, sem hér hafa verið útlistaðar, benda þó alls ekki til þess að allt sé eins og best verður á kosið. Þegar einstaka skólar eru með illa menntaða kennara sem fá ekki einu sinni endurmenntun við hæfi, hugarfar sumra nemenda einkennist af hangsi og metnaðarleysi, námskrám er ekki fylgt, unnið er með lélegri námsefni á námsbrautum, sem standa ekki undir nafni, er von að mann langi að grípa í taumana.

3.2 Þekkt vandamál við kennslu vigra og hornafalla

Ýmislegt bendir til þess að þegar nemendur læra um vigra þá rugla þeir stundum saman vigri og venjulegri rauntölu (Appova, Berezovski). Í ýmsum talnadæmum sem Appova og Berezovski lögðu fyrir nemendur var reynt á eftirfarandi hæfniviðmið:

- Að nemandi geti fundið vigur samsíða öðrum gefnum vigri
- Að nemandi geti fundið ofanvarp vigurs á annan vigur.
- Að nemandi geti reiknað blandað margfeldi þ.e. margfaldað vigur með rauntölu.
- Að nemandi geti reiknað lengd vigurs
- Að nemandi geti lagt saman tvo vigra og geti einnig fundið mismun þeirra
- Að nemandi geti skrifað vigur sem summu tveggja annarra vigra.

Í tilteknu verkefni sem Appova og Berezovski lögðu fyrir 23 nemendur, gátu einungis fimm þeirra gátu leyst það á fullnægjandi hátt. Hinir 18

nemendurnir gerðu ýmis mistök en greina mátti tvö munstur í villum þeirra. Í fyrsta lagi voru villur sem byggðu á rangri röksemdafærslu eða rangri rúmfræðilegri túlkun á reikniaðgerðum vigra og ofanvarps þeirra. Í öðru lagi voru villur sem fólu í sér að nemendur gerðu ekki greinarmun á vigri og rauntölu.

Fram komu ranghugmyndir eins og að hægt væri að reikna mismun á tölu og vigri eða öfugt. Slíkur reikningur er ekki skilgreindur. Einnig héldu sumir að margfeldi tölu og vigurs væri tala. Þá kom fram misskilningur sem fól það í sér að nemandi hélt að innfeldi tveggja vigra væri vigur en ekki rauntala. Leiða má líkur af því að þessar villur stafi af því að nemendur skapa hugtökunum ekki merkingu og skilja því í raun ekki hvað þeir eru að gera. Rétt er að taka fram að þessir nemendur voru listnámsnemendur á háskólastigi og verkefnið sem um ræðir fjallaði um þrívíða vigra sem eru ekki viðfangsefni þeirrar námseiningar sem þessi greinargerð fjallar um. Vandamál tengd því að rugla saman tölum og vigrum geta þó átt sér stað óháð því hvort vigur er tvívíður eða þrívíður.

Hülía Gür (2009) gerði rannsókn meðal 140 nemenda um þekkingu þeirra og skilning á hornaföllum. Lögð voru fyrir 9 verkefni sem reyndu bæði á kunnáttu og skilning. Þar sem námsefni vefsins míns inniheldur kennslu um hornaföllin $\cos(x)$, $\sin(x)$ og $\tan(x)$, er hægt að yfirfæra 7 þessara spurninga yfir á námsefni vefsins. Tvö verkefnanna get ég ekki yfirfært yfir á þetta námsefni því þau innihalda spurningu um hornafallið $\cot(x)$ sem ég sleppi.

Meðal verkefnanna var að láta nemendur útskýra hvers vegna jafnan $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$ gildir fyrir öll gildi á x . Einhverjir nemendanna sýndu að jafnan gildir fyrir gefið gildi, þ.e. þeir sýndu dæmi um virknina en sönnuðu ekki fullyrðinguna almennt.

Eitt verkefnanna var að útskýra hvernig standi á því að tangens af 90 gráðu horni sé óskilgreind stærð. Sumir nemendur bentu á að tangens af horni væri hlutfallið á milli mótlægrar skammhliðar þess og aðlægrar skammhliðar þess í réttthyrndum þríhyrningi, en ekki væri hægt að reikna tangens með þeim hætti þegar hornið væri 90 gráður. Þarna eru nemendur haldnir þeirri ranghugmynd að hornaföll séu eingöngu notuð í þríhyrningum.

Ég bar upp spurninguna við Ingólf Gíslason stærðfræðikennara hvað nemendur misskildu oftast í námi um vigra og hornaföll og var svar hans á þessa leið:

Ég get nú ekki svarað þessu. Stærsta vandamálið í þessu eins og flestu öðru er að margir nemendur skapa litla merkingu fyrir þessi hugtök. Þeir hugsa ekki um það hvað vigrar ERU og hvaða eiginleika þeir hafa, heldur reyna þeir að læra „aðferðir“ til þess að reikna alls konar dæmi. Allar þessar aðferðir brenglast í minninu vegna þess að nemendur hafa aldrei hugsað um merkingu hugtakanna. Svo ef þú skoðar úrlausnir nemenda á dæmum þá koma fram alls konar „villur“ við öllu mögulegu. Stærsta spurningin um t.d. vigra og hornaföll er: Til hvers er þetta? Hvaða vandamál leysir þetta? (Og þá þýðir ekkert að benda á einhver dæmi og leysa þau, heldur verður að vera ljóst hvernig þessi tilteknu hugtök tengjast vandanum með rökrænum hætti). Ég myndi segja að það væri mest þörf fyrir verkefni þar sem vigrar og hornaföll spretta fram sem eðlileg tæki til þess að lýsa einhverjum fyrirbærum (Ingólfur Gíslason, munnleg heimild 8.01.2015).

Það er einstaklingsbundið hvaða mistök nemendur gera en hugsanlega er skýring Ingólfs rétt, þ.e. að nemendur búi ekki að nægjanlega góðri merkingarsköpun.

3.3 Er kennd stærðfræði í skólakerfinu?

Þegar fjallað er um stærðfræði eða stærðfræðikennslu í framhaldskólum er nauðsynlegt að velja fyrir sér hvað stærðfræði raunverulega er og hvort við séum í raun að kenna stærðfræði í framhaldsskólum. Mikið hefur verið rætt og ritað um hvort árangur nemenda í stærðfræði sé ásættanlegur og einnig hefur verið fjallað um það hvort við kennum nemendum réttu atriðin.

Erfitt er að koma með einhverja allsherjarskilgreiningu á því hvað stærðfræði er og í raun ekki hægt í stuttri greinargerð eins og þessari. Hins vegar eru hugmyndir margra um hana byggðar á mjög þröngri túlkun. Flestir telja sig hafa lært einhverja stærðfræði en fæstir spyrja sig í raun að því hvað stærðfræði er. Sjálfur er ég oftast spurður að því sem stærðfræðingur hvort ég geti margfaldað tiltekna háar tölur án reiknivélar þegar ég svara því hvaða menntun ég hafi. Margir skilja stærðfræði þannig að hún feli aðallega í sér að fylgja leiðbeiningum við að beita ákveðinni reikniaðgerð á ákveðna tegund dæma og telja því að stærðfræði gangi út á utanbókarnám aðferða og reikning.

Því miður er þessari þröngu túlkun á stærðfræði að mínu mati viðhaldið í skólakerfinu. Paul Lockhart (2009) er mjög gagnrýninn á stærðfræðikennslu.

Hann telur skólakerfið gefa svo kolranga mynd af því hvað stærðfræði er að mjög erfitt sé fyrir hinn almenna nemenda að ná nokkrum tengslum við greinina. Hann líkir stærðfræði við list en hún sé hvorki kynnt né kennd sem slík. Hann líkir stærðfræðinámi í skólakerfinu við tónlistarkennslu þar sem nemendur læra að skrifa helstu tákni tónfræðinnar án þess þó að heyra nokkurn tíma tónlist – hvað þá að spila hana sjálfir eða skapa.

En hvað á Lockhart við með þessu? Í grein sinni, A mathematician's lament, kemur hann inn á það hvernig sköpunarþátturinn hefur í raun misst allt gildi sitt í stærðfræðikennslu. Hann heldur því fram að stærðfræði sé ekki síður list en vísindi. Hann styðst við áhugaverða myndlíkingu eftir G. H. Hardy

A mathematician, like a painter or poet, is a maker of patterns. If his patterns are more permanent than theirs, it is because they are made with ideas. (Lockhart, 2009, bls. 3) Stærðfræði fæst við samhengi eða mynstur hluta eða hugtaka. Hún snýst um að spyrja áhugaverðra spurninga og leita svara við þeim. Lockhart bendir á að bak við lausn stærðfræðilegra vandamála sé langt sköpunarferli sem almennt er hulið hinum almenna leikmanni eða nemanda. Að baki uppgötvunar eða lausnar á stærðfræðivandamáli er oft löng glíma. Í þeirri glímu hafa stærðfræðingar (eða aðrir) þurft að hugsa um vandann frá mörgum sjónarhornum, þeir hafa prófað sig áfram með ýmsar hugmyndir, reynt margar leiðir bæði þekktar og nýjar. Í þessari glímu hafa skipst á skin og skúrur. Ferlið hefur krafist mikillar hugmyndavinnu, ímyndunarafis og vilja til að leita margra leiða í leit af lausninni. Þegar vinnan svo skilar árangri (sem hún gerir stundum en ekki alltaf) þá er lausnin gjarnan útskýrð í hnitmiðuðum texta.

Þegar nemandinn lærir svo stærðfræðina sem uppgötvaðist eftir löngu glímuna er í raun öllum söguþræðinum sleppt nema endinum. Lockhart líkir þessu við að sjá eingöngu fyrstu mínúturnar í bíómynd og þær allra síðustu. Tökum nú þekkta setningu úr stærðfræðisögunni:

Setning Pýþagórasar: Ef þríhyrningur er rétthyrndur, þá gildir að $c^2 = a^2 + b^2$ þar sem a og b eru lengdir skammhliðanna en c er lengd langhliðarinnar.

Stærðfræði fæst við samhengi eða mynstur hluta eða hugtaka. Hún snýst um að spyrja áhugaverðra spurninga og leita svara við þeim. Lockhart bendir á að bak við lausn stærðfræðilegra vandamála sé langt sköpunarferli sem almennt er hulið hinum almenna leikmanni eða nemanda. Að baki uppgötvunar eða lausnar á stærðfræðivandamáli er oft löng glíma.

Conrad Wolfram (2010) skilgreinir stærðfræði í fjórum skrefum. Fyrsta skrefið er að spyrja spurninga, þannig áttum við okkur á hverju við erum að leita að og hvaða forsendur við ætlum að gefa okkur við leitina. Annað skrefið felst svo í að klæða spurninguna í stærðfræðilegan búning svo hægt sé að finna svarið við henni með reikningi, rökfræði, forriti eða einhverju öðru. Þriðja skrefið er útreikningurinn á verkefninu í öðru skrefi. Að lokum er svo sannprófun í fjórða skrefinu sem felur í sér að sannreyna hvort lausnin sé sönn og þannig nothæf.

Wolfram heldur því fram að yfir 80% af tímanum, sem varið er í stærðfræðikennslu, fari í þriðja skrefið, sem er reikningurinn. Hann bendir réttilega á að tölvur séu í raun miklu betur til þess fallnar að reikna heldur en manneskja, hugsanlega þrátt fyrir margra áratuga þjálfun hins mennska. Tölvur reikna bæði miklu hraðar, af miklu meiri nákvæmni og gera ekki mistök nema þær séu forritaðar ranglega eða mataðar af röngum upplýsingum.

Margir halda að stærðfræði snúist bara um reikning og margir kennarar halda í raun að þannig eigi þetta að vera. Wolfram bendir á að aldrei hafi verið meiri þörf fyrir stærðfræði og margir aðrir en stærðfræðingar noti stærðfræði. Vandamálagreining með kerfisbundinni lausnaleit sé sameiginleg öllu mannkyni og því geti allir fengist við stærðfræði og í raun komi stærðfræði öllum við. Því miður sé það þó ekki sú mynd af stærðfræðinni sem við sýnum nemendum okkar. Þeirra mynd er mest bundin við að reikna stöðluð dæmi beint upp úr bókum og jafnvel án hjálpartækja eins og reiknivélar. Wolfram leggur til að við notum tölvur meira í stærðfræðikennslu svo hægt sé að nýta tímann betur í þau skref sem hann nefndi númer eitt, tvö og fjögur.

3.4 Af hverju vefur?

Ég hef þegar komið inn á að víða sé pottur brotinn í stærðfræðikennslu og vísa ég þá meðal annars til skýrslunnar um úttekt á stærðfræðikennslu í framhaldsskólum. Mig hefur lengi langað til þess að gefa út námsefni fyrir framhaldsskólanemendur í stærðfræði og stafar það bæði af áhuga mínum auk þess sem þörfin fyrir það er brýn ef marka má innihald áður nefndrar skýrslu. Sú stærðfræði, sem kennd er í framhaldsskólum landsins, hvílir öll meira eða minna á margra alda gamalli þekkingu sem hefur algjörlega staðist tímans tönn. Þótt inntak námsþáttanna sé margra alda gamalt, þá er ekki þar með sagt að kennslan eigi að vera óbreytt svo öldum skiptir. Að sumra mati hefur stærðfræðikennsla lítið sem ekkert breyst miðað við þá möguleika sem fyrir hendi eru hvað varðar notkun á upplýsingatækni,

margmiðlun og með því að nýta internetið meira. Ég vil þó ekkert alhæfa í þessum efnum.

Sú kynslóð, sem nú stundar nám við framhaldsskóla landsins, er vön mikilli tölvunotkun og á ég þá við allt í senn, heimilistölvur, fartölvur, spjaldtölvur og snjallsíma. Margir kennarar hafa amast yfir farsímanotkun nemenda og þeirri truflun sem hún hefur í för með sér. Guðlaug Ragnarsdóttir (2013) gerði áhugaverða starfendarannsókn. Hún var farin að upplifa sjálfa sig sem nöldrandi kennara yfir truflandi snjallsímum og fjallar um þá viðhorfsbreytingu hennar sem leiddi til áhuga hennar á að innleiða upplýsingatækni í kennslu og stórbæta þannig kennsluhætti sína. Rannsókn hennar leiddi í ljós að ef góðar aðstæður eru til tölvunotkunar inni í kennslustofu, án þess að kennarinn nýti þann möguleika, þá eykur það líkurnar á truflandi notkun tækjanna sem nemendurnir eru með. Lausnin er því að nýta áhuga nemendanna á tækjunum og leyfa þeim að nota þau til náms öllum til hagsbóta.

Þann 10. apríl 2015 hélt 3F Félag um upplýsingatækni og menntun ráðstefnu í Háskólanum í Reykjavík. Þar flutti Heiðar Ingi Svansson, framkvæmdastjóri Iðnú bókaútgáfu, stutt erindi um rafræn námsgögn. Í máli hans kom fram að lögmál hins frjálssa markaðar ættu ekki lengur við um útgáfu prentaðs námsefnis á Íslandi. Markaðurinn væri of lítill á Íslandi auk þess sem velta námbóka er mest á skiptibókamörkuðum. Staðan væri sú að hvorki höfundar né útgefendur hafi áhuga á útgáfu námsbóka og ef ekkert verði að gert verði þetta í raun deyjandi vettvangur. Hann nefnir þá sláandi staðreynd að útgáfa námsbóka hjá Iðnú er rekin með miklu tapi og það tap sé greitt niður með útgáfu ferðakorta.

Hann varpaði svo fram spurningunni um hvað sé til ráða. Frekari framlög fáist ekki frá Ríkinu. Hins vegar bendir hann á breytingar á lögum um framhaldsskóla númer 92/2008 sem samþykkt voru á Alþingi í janúar 2015:

Heimilt er í tilraunaskyni með sérstök leyfi ráðherra að innheimta gjald fyrir rafrænt námsefni sem framhaldsskólar ákveða og er veigamikill hluti af námsefni í námsáfangi á skráðri braut viðkomandi nemenda eða í áfangi sem þeir hafa ákveðið að stunda sem valgrein"

Í ljósi þessara upplýsinga er því hugsanlegt að rafrænt námsefni muni fá aukið vægi í skólakerfinu en lögin eigi þó eftir að útfæra nánar. Til dæmis eigi eftir að skilgreina nánar hvað átt sé við með rafrænu námsefni (Heiðar Ingi Svansson, munnleg heimild, 10.apríl 2015).

Löng hefð er fyrir því að nota útgefnar kennslubækur og flestir spá því að þannig verði það að einhverju marki áfram þrátt fyrir það hve takmarkaðar þær eru eins og áður hefur verið nefnt. Ég hef nú fjallað um stöðu námsbóka bæði í markaðslegu samhengi og út frá skoðunum mínum um takmarkandi þætti þeirra til kennslu. Því er eðlilegt að spurt sé: „Hvers vegna vefur?“

Fyrst ber að nefna hinn augljósa kost að námsefni á netinu er hægt að skoða hvar sem er í heiminum og hvenær sem er, svo framarlega sem nemendur hafi þokkalegt aðgengi að netinu, en það sama verður ekki sagt um hefðbundna kennslubók sem nýtist ekki nema nemandinn hafi hana meðferðis.

Í öðru lagi býður margmiðlun upp á margfalt fleiri möguleika við merkingarsköpun og framsetningu heldur en prentað efni sem er að mestu bundið við texta og myndir. Í þriðja lagi er námsefnisgerð á vefnum sjálfbær í þeim skilningi að ekki þarf að ganga á skóga jarðarinnar ef áhugi eða þörf er á endurbótum á vefnum öfugt við hina pappírshreku kennslubók.

„Segðu mér og ég gleymi, sýndu mér og ég man, láttu mig gera og ég læri.“ Þessi einfaldi 2500 ára boðskapur Konfúsíusar er í raun kjarninn í hugmyndafræði minni. Þessi skemmtilega setning vísar til þess hve mikilvægt er að nemandinn öðlist fjölbreytta upplifun af námi sínu. Í myndböndunum reyni ég að draga úr vægi texta en sleppi þeim þó ekki alveg heldur nota hann til áhersluauka við talað mál. Á meðan ég segi frá stærðfræðinni þá læt ég hlutina birtast og breytast í takt við innlög minna. Þannig sameina ég hreyfimyndir og hljóð til þess að stuðla að merkingarsköpun á þann hátt sem ekki er hægt í kennslubók. Lykilsetningin er þó: „Láttu mig gera og ég læri“. Með þessu á ég við þann mikla fjölda verkefna sem nemendur geta spreytt sig á í verkefnasafninu sem fylgir. Verkefnin eru öll gagnvirk með einum eða öðrum hætti. Sum verkefnin eru þess eðlis að nemandinn kynnist sjálfur eiginleikum hugtaka með því prófa sig áfram í gagnvirkum smáforritum sem eru gerð með GeoGebra og hægt er að smella á beint innan vefsins. Önnur verkefni eru þess eðlis að þau kalla á röksemdafærslu eða reikningsaðferð til þess að komast að tiltekinni niðurstöðu.

GeoGebra er forrit og virkar ekki sem slíkt í útprentaðri kennslubók og getur að sjálfsögðu ekki gert nemendum neitt gagn nema þeir vinni með það á netinu eða setji það upp á tölvunum sínum. Mér fannst ótækt að ætlast til þess að nemendur settu upp hugbúnað á sínum tölvum þegar hægt er að keyra forritið á netinu öllum að kostnaðarlausu.

Vísbendingar eru um að sé námsefni sett fram með hjálp GeoGebra þá auki það árangur af kennslu sem er byggð á hugsmíðahyggju sem margir telja vera forsendu náms til skilnings. Þrjú tyrkneskir fræðimenn gerðu megindelega samanburðarrannsókn þar sem skoðuð voru áhrif kennslu með GeoGebra í umfjöllun um hornaföll. Valið var úrtak sem samanstóð af 51 nemanda sem var síðan skipt í tvo hópa. Annar fékk kennslu byggða á hugsmíðahyggju þar sem notast var við GeoGebra en hinn hópurinn fékk einnig kennslu byggða á hugsmíðahyggju en án nokkurrar notkunar á GeoGebra. Þekking beggja hópa var mæld bæði fyrir og eftir kennslu. Til að bera saman ólíkt gengi hópanna eftir kennslu var beitt óháðu t-prófi. Hóparnir voru svipaðir að getu fyrir kennslu en tölfræðilega marktækur munur var á milli hópanna, $t(43) = 5,43$, $p < 0,001$, og hópurinn, sem fékk kennslu með GeoGebra, var með hærra meðaltal (Zengina, Furkanb og Kutluca, 2011). Þetta þýðir með öðrum orðum að mismunurinn á milli meðaltalanna var það mikill að tölfræðilega séð eru líkurnar á því að hann stafi af tilviljun innan við 0,1%.

3.5 Vendikennsla

Með tilkomu netsins, aðgengi almennings að því og bættum hraða og gæðum á nettengingum hefur skapast svigrúm til breyttra kennsluhátta og er það vel. Ein slík kennsluaðferð er spegluð kennsla (e. flipped classroom). Spegluð kennsla er einnig oft nefnd vendikennsla. En hvað er vendikennsla? Hverjir eru kostir hennar? Hverjir eru gallar hennar? Hvernig tengist vendikennsla þessum vef?

Háskólabrú Keilis er skóli fyrir 25 ára og eldri og kennir námsefni framhaldsskólanna. Hann gefur sig út vera að vera skóli sem leggur áherslu á vendikennslu. Á vef Keilis er fjallað um vendikennslu eða speglaða kennslu sem almenna útskýringu á fyrirbærinu. Þar stendur:

Keilir leggur áherslu á svokallaða speglaða kennsluhætti (flipped classroom). Með því er átt við að hefðbundinni kennslu er snúið við þar sem fyrirlestrar og kynningar kennara eru vistuð á netinu. Nemendur geta horft og hlustað á kynningarnar eins oft og þeim sýnist og hvar sem þeim sýnist. Þá geta nemendur sent spurningar um efnið til kennara (eða annarra nemenda í hópnum) og fá svör á netinu sem öllum eru opin. Þá eru nemendur hvattir til að nota netið til að finna heppilegt kennsluefni.

Kennslustundir í skólanum verða fyrir vikið öðruvísi. Þar vinna nemendur verkefni, oftast saman í hóp, og kennarar aðstoða eftir þörfum við úrlausnir. Þar sem þetta form hefur verið reynt virðist lærdómurinn verða lifandi ferli sem virkjar nemendur á skemmtilegan hátt. Nám er alltaf á ábyrgð nemenda og undirbúningur fyrir verkefnatímana í skólanum er nauðsynlegur til þess að vinnan í skólanum nýtist á virkan hátt. (Keilir, 2015)

Rakel Margrét Viggósdóttir (2014) hefur rannsakað viðhorf nemenda Keilis til speglaðrar kennslu. Hún bar m.a. upp eftirfarandi spurningu við nemendur: „Hvernig telur þú stærðfræði henta fyrir speglaða kennslu?“ Niðurstöður voru þær að 56% nemenda töldu stærðfræði henta mjög vel í speglaða kennslu, 20% nemenda sögðu hana henta frekar vel. 15% aðspurðra svöruðu með hvorki né, 2% sögðu hana henta illa og 7% töldu hana henta mjög illa. Af þessum gögnum er ljóst að mikill meirihluti nemenda Keilis er ánægður með kennslufyrirkomulagið, a.m.k. í stærðfræði. Hugsanlega þarf þó að taka þessum niðurstöðum með einhverjum fyrirvara vegna þess að aðeins 59 nemendur af 110 svöruðu spurningalistanum, eða 53,6%.

Kostirnir við þetta fyrirkomulag eru margir. Í fyrsta lagi er erfitt að halda fyrirlestur í skólastofu sem er hvort tveggja í senn fræðandi fyrir bekkinn og einstaklingsmiðaður. Það er oft algjörlega ógerlegt að velja hraða á yfirferðinni þannig að hún henti öllum. Þeim mun lengri sem innlögnin er innan kennslustofunnar þeim mun minni tími er til þess að svara spurningum nemenda, endurtaka það sem fer forgörðum eða leysa önnur vandamál nemenda. Nemandinn getur hins vegar horft eins oft eða sjaldan á vídeóin og honum sýnist. Auk þess er fyrirlesturinn vistaður á vefnum og því alltaf hægt að sækja hann aftur. Þetta gagnast sérstaklega nemendum sem einhverja hluta vegna ná ekki að mæta á fyrirlestur á réttum stað á réttum tíma vegna veikinda eða af öðrum ástæðum. Kjósi kennari að endurtaka fyrirlestur sinni í hefðbundna kennslulíkaninu þá er það á kostnað annarra þátta í skólastarfinu.

Í öðru lagi leiðir þetta til þess að meiri tími gefst til umræðna, hópavinnu og aðstoðar við nemendur. Með þessu móti eru meiri líkur á að því að kennarinn geti mætt öllum nemendum á þeirra forsendum því hann hefur meiri tíma til þess en ella.

Í þriðja lagi er oft erfitt fyrir kennara að halda athygli bekkjarins óskiptri í hefðbundna fyrirlestrarforminu því nemendahópurinn er mjög fjölbreyttur,

nemendur eru ekkert endilega eins áhugasamir um viðkomandi fag og kennarinn auk þess sem erfitt er að halda nemendum virkum þegar kennslan byggir á einræðu kennarans og lítilli þátttöku nemendanna.

Í fjórða lagi eru nemendur frekar einir á báti við verkefnavinnu þegar hefðbundna fyrirkomulagið er við lýði. Þegar nemendur leysa verkefni eða sinna hefðbundinni heimavinnu hafa þeir í raun hvorki aðgang að kennaranum með beinum hætti né skólafélögunum. Sé þetta gert með vendikenslu hafa þeir bæði aðgang að kennaranum, skólafélögunum, námsbókinni (ef hún er til staðar) og jafnvel fyrirlestrunum ef nemandinn er t.d. með snjallsíma eða fartölvu. Rétt er þó að nefna að menn greinir á um hvað átt sé við með hefðbundna fyrirkomulaginu. Víða er til dæmis stutt innlögn í upphafi kennslustundar og reynt að halda lengd hennar í lágmarki til þess að hægt sé að nýta tímann til verkefnavinnu nemenda.

Ekki eru þó allir jafn hrifnir af vendikenslu enda er hún ekki gallalaus. Forsendan fyrir góðri vendikenslu er sú að nemendur horfi á vídeóin heima fyrir eða hvar sem þeir stunda heimanám sitt. Einnig verða kennsluvídeóin að vera bæði skemmtileg og góð svo að þau leysi fleiri vandamál en þau skapa. Margir kennarar hafa auk þess ekki alltaf mikinn tíma fyrir vídeóupptökur og hafa mismikla þekkingu á gerð vídeóa.

Í raun kemur ekkert í staðinn fyrir þau mannlegu samskipti sem eiga sér stað þegar nemendur geta spurt kennarann í rauntíma innan kennslustofunnar. Mörgum nemendum finnst það vera galli. Séu vídeóin óvönduð leiða þau því stundum til þess að nemendur mæti óundirbúnir í tíma (Butt, 2013).

Ef nemendur ná ekki árangri vegna þess að þeir horfa ekki á vídeóin er ekki hægt að gera vendikenslu að blóraböggli. Ef nemendur læra ekki heima í hefðbundna kennslulíkaninu er ekki heldur hægt að skella skuldinni á viðkomandi kennsluhætti. Hver og einn nemandi verður að taka ábyrgð á sínu námi hver svo sem kennsluaðferðin er.

Hvað varðar mikla undirbúningsvinnu kennara við vídeógerð vil ég nefna að slíkt er í raun skammtímasjónarmið. Þegar kennari hefur gert vídeó, sem hann er sáttur við er gildi vídeósins varanlegt og hann getur því losnað við að skrifa efni eða boðskap vídeósins margendurtekið á tússtöflu. Að auki kosta allar breytingar í skólakerfinu aukna vinnu til skamms tíma. Að sjálfsögðu á ekki að gera breytingar eingöngu breytinganna vegna og á sama hátt á alls ekki að ríghalda í gamlar venjur eingöngu vanans vegna. Skólakerfið getur í eðli sínu líklega aldrei orðið fullkomið og því þarf stöðugt að huga að þróun þess svo að það taki breytingum í takt við breyttar aðstæður og viðhorf í þjóðfélaginu.

Þó að námsefnið styðji vonandi vel við vendikennslu þá er vendikennslan sem slík ekki forsenda þess að vefurinn geti gert gagn. Ég tel að allar kennsluaðferðir hafi sína kosti og galla. Ef einhver þeirra væri fullkomin væru hinar einfaldlega ekki til lengur. Margir kennarar nota einmitt sambland af vendikennslu og öðrum kennsluaðferðum. Hitt er svo annað mál að ef kennsluvídeó eru mjög ófullkomin eða léleg þá missir vendikennslan marks því þá er alveg eins gott að hafa hefðbundinn fyrirlestur í staðinn.

3.6 Leiðbeiningar um notkun vefsins

Almennar leiðbeiningar um notkun vefsins er að finna á honum sjálfum en ég birti hér innhald þeirrar vefsíðu orðrétt.

3.6.1 Tilgangur vefsins

Tilgangurinn með þessum vef er að auka framboð á rafrænu námsefni í stærðfræði og afmarkast vefurinn við námseiningu um vigra og hornaföll. Vefurinn er bæði hugsaður fyrir kennara, sem vilja nota hann til kennslu innan skólakerfisins, og fyrir nemendur sem vilja sækja sér viðbótarfræðslu eða verkefni. Þetta er vefur, sem er ekki byggður á neinni kennslubók, og er tilraun höfundar til þess að hanna bókarlausu námseiningu sem byggir á þeim eiginleikum netsins eða vera opið hvar sem er og hvenær sem er.

3.6.2 Hvað inniheldur vefurinn?

Vefurinn inniheldur námsefni í fjórum köflum eða hlutum. Hann inniheldur fjórar vefsíður með kennsluvídeóum eða jafn margar köflunum. Fyrsta vefsíðan inniheldur almenna kynningu á vigrum. Önnur vefsíðan inniheldur vídeó um hornaföll og innfeldi. Þriðja inniheldur vídeó um notkun hornafalla í þríhyrningum. Það fjórða inniheldur svo ýmislegt viðbótarnámsefni um hornaföll, eins og gröf þeirra og jöfnur sem innihalda hornaföll. Fjöldi vídeóa prýðir vefinn og eru flest þeirra um það bil 15 mínútna löng.

Vefurinn inniheldur einnig verkefnasafn sem er á pdf-formi. Verkefnasafnið er í fjórum köflum sem hver og einn inniheldur verkefni í samræmi við efni vídeóanna. Sum verkefnanna hafa vísun í gagnvirkar vefsíður á netinu, sem byggja á forritinu GeoGebra sem er orðið vinsælt kennsluforrit í íslenska skólakerfinu, en önnur eru leyst með blýanti á pappír. Hægt er að prenta verkefnasafnið út í fullu umbroti eða lesa það á netinu.

Að lokum inniheldur vefurinn hæfniviðmið svo að bæði kennarar og nemendur geta sett sér markmið með ástundun námsins kjósi þeir að gera svo.

3.6.3 Tæknilegar forkröfur og námstækni fyrir vefinn?

Það þarf þokkalega nettengingu og gildir þá einu hvort um er að ræða borðtölvu, fartölvu, spjaldtölvu eða snjallsíma. Nettengingar eru misjafnlega stöðugar og hraðvirkar. Vissulega gildir það hér sem annars staðar að vefurinn kemur best út með öflugri tengingu. Vídeóin kunna að vera þung í notkun fyrir sumar tengingar en boðið er upp á að hala þeim niður sem flýttir fyrir ef nemendur vilja skoða þau oftár en einu sinni.

Til að verkefnasafnið virki þarf annað hvort forrit, sem les pdf-skjöl, eða hafa þann möguleika innbyggðan í vafra notandans. Það er val notandans hvort hann vilji lesa verkefnasafnið í pdf-lesara eða prenta það út. Kjósi menn að prenta það út þarf aðgang að prentara. Útlit verkefnaheftisins er í lit svo ekki er víst að útprentun í svart-hvítu komi vel út; að minnsta kosti er mælt með útprentun í lit.

Að sjálfsögðu getur verið nauðsynlegt fyrir nemandann að punkta hjá sér og glósa ýmislegt sem honum þykir mikilvægt og það er persónubundið hvernig hver og einn vill gera það. Því er mælt með að nemendur hafi því pappír og skriffæri við höndina. Að auki er nauðsynlegt að vera með góða reiknivél sem þarf þó ekki að vera grafísk. Nægjanlegt er að reiknivélin innihaldi eftirfarandi notkunarmöguleika:

- Grunnreikniaðgerðirnar samlagningu, frádrátt, margföldun og deilingu.
- Hornaföllin \cos , \sin og \tan og andhverfur þeirra.
- Geti reiknað ferningsrót (kvaðratrót)
- Innihaldi veldistakka.
- Innihaldi námundunargildi tölunnar π .

Í öllu námi er mikilvægt að setja sér markmið. Enginn nær árangri nema hann viti hvert hann ætlar að stefna og sé bæði einbeittur og ákveðinn á leið sinni þangað. Áður en ráðist er á innhald hvers kafla fyrir sér getur verið gagnlegt að skoða hæfniviðmiðin sem er að finna á valmyndinni efst á síðunni. Tilgangur þeirra er að gera námið markvissara og hægt er að merkja við þau efnisatriði sem nemendur telja sig hafa náð tökum á. Ef kennari velur að nota vefinn til kennslu og byggja hann á eigin kennsluáætlun er best að vinna eftir þeirri áætlun og markmiðum sem þar

eru tilgreind. Hæfniviðmiðin eru hugsuð til leiðbeiningar en í raun er það val kennarans hvort hann kýs að styðjast við þau eða ekki.

Þegar horft er á vídeóin er best að renna yfir innhaldslýsingu þeirra og bera hana saman við hæfniviðmiðin. Þannig má fá vísbendingu um það eftir hverju nemandinn eigi að hlusta. Það að horfa á kennsluefni krefst virkrar hlustunar. Gott er að hafa pappír og skriffæri við höndina og skrá hjá sér minnispunkta, eða skrifa niður spurningar sem hægt er að beina til kennara ef eitthvað er óljóst eftir að nemandinn hefur horft á vídeóin. Nemendum er frjálst að hala vídeóunum niður á tæki sín en það getur flýtt fyrir því að sækja þau aftur. Nettengingar nemenda eru misgóðar og því er ágætt að hafa þetta ráð bak við eyrað.

Þegar verkefnin eru unnin er mælt með fjölbreyttum vinnuaðferðum og að hver og einn finni leið sem honum hentar. Sum verkefnanna eru tengd smáforritum á netinu og er tilgangur þeirra að nemendur öðlist persónulega reynslu af því að leika sér með ýmis hugtök stærðfræðinnar. Mikilvægt er að nemendur haldi utan um þá þekkingu sem myndast hjá þeim við að glíma við verkefnin og er það óháð því af hvaða tagi verkefnið er. Sum verkefnanna snúast einfaldlega um einfaldan reikning unninn í höndunum með eða án reiknivélar.

Mælt er með umræðum um námsefnið. Með því móti fá nemendur þjálfun í því að hanna lausnir í sameiningu. Umræður veita nemendum þjálfun í að rökstyðja mál sitt og gera lausnir sínar skiljanlegar bæði sjálfum sér og öðrum.

4 Um hönnun og gerð námsefnisins

4.1 Verkefnasafnið

Enginn verður góður í stærðfræði án þess að upplifa hana sjálfur í gegnum ígrundun og verkefni. Góð verkefni eru forsenda þess að nemendur öðlist nauðsynlega þjálfun og sjálfstraust til þess að þroskast og ná árangri. Stundum kjósa nemendur að beita þekktum aðferðum sem þeir hafa lært, t.d. af kennara, en stundum beita þeir sinni eigin sköpunargáfu í lausnarferlinu. Hvort sem lausnaferlið er þeirra eigin hugarsmíð eða lærð af öðrum þá verður lausnaferlið ekki þjálfað án góðra verkefna. Í þessu gildir eins og flestu öðru í lífinu að æfingin skapar meistarann. Námsefninu fylgir því verkefnasafn með sama heiti og verkefnið í heild sinni: Ólán að gleyma bókinni!

Verkefnaheftið er á vef mínum, algebra.is, og er opið öllum án nokkurs lykilorðs eða áskriftar. Mig hefur lengi langað að skapa eitthvað gagnlegt og gefa það samfélaginu. Þannig tel ég mig vera að gera góðverk svo að námsmenn, kennarar og aðrir sem koma að menntamálum geti notið góðs af áhuga mínum og menntun í stærðfræði. Kennurum er heimilt að nota verkefnaheftið án nokkurra skilyrða, nema hvað almenn lög um höfundarétt gilda í þessu sambandi, og bið ég því alla notendur verkefnasafnsins að virða þau. Hér er ég í raun að vinna samkvæmt hugmyndafræðinni um opið námsefni.

Ég hef haldið því til streitu í skrifum mínum að ekki sé þörf á bók við kennslu námseiningarinnar. Að auki er orðið bók ekki lengur einskorðað við bundna útprentaða bók. Sjálfur tel ég að gott pdf-skjal geti alveg talist vera bók enda hentar það jafnt til birtingar á netinu og til útprentunar eins og um hefðbundna bók sé að ræða.

Að auki hefur verkefnasafnið ýmsa kosti sem hefðbundin bók hefur ekki og er þá átt við rafræna formið á pdf-skjalinu. Í fyrsta lagi er hægt að fara í efnisyfirlit skjalsins og smella á einstaka kafla eða undirkafla og þá flyst notandinn á viðeigandi stað í skjalinu. Í öðru lagi inniheldur verkefnasafnið þó nokkuð af gagnvirkum verkefnum sem eru vistuð á vef alþjóðlegu GeoGebra-samtakanna. Notandinn getur opnað þessi verkefni á vefnum. Þessi verkefni hafa fasta varanlega slóð á internetinu en hægt er að nálgast þau innan vefsins og þarf notandinn í raun ekkert að hafa áhyggjur af slóð þeirra á netinu. Verkefnasafnið inniheldur fjóra kafla og eru þeir jafn margir

köflunum á vídeóvefnum. Verkefnasafnið er byggt upp með þeim hætti að undirkaflar hvers kafla innihalda námsþætti sem birtast þar í sömu röð og umfjöllun þeirra á vídeóvefnum. Undirkaflarnir eru þó ekki endilega alltaf nákvæmlega jafn margir og fjöldi vídeóanna á vefnum. Hins vegar er hægt að nota þá þumal fingursreglu að þeim mun framar sem verkefni birtist í ákveðnum kafla þeim mun ofar er vídeóið sem fjallar um innihald þess á viðkomandi vefsíðu. Til dæmis endar kafli 2 í verkefnaheftinu á verkefnum sem tengjast innfeldi og hagnýtingu þess og því eru þau vídeó, sem fjalla um innfeldi, neðst á vefsíðunni sem heitir kafli 2.

Gagnvirku verkefnin voru búin til í náms og kennsluforritinu GeoGebra og síðan var þeim halað upp á vef þess ágæta samfélags. Þau eru því í raun opin öllum heiminum óháð því hvort notendur séu með sjálft verkefnasafnið. Eins og áður hefur komið fram þurfa notendur verkefnasafnsins ekki að leita að þeim á netinu heldur geta þeir smelt á þau innan vefsins.

Verkefnaheftið var skrifað og brotið um í LaTeX sem er umbrotsmál (Mark-Up language). LaTeX er mjög útbreytt umbrotsmál og nýtur mikilla vinsælda aðallega meðal höfunda sem fást við fræðileg skrif, einkum við texta um stærðfræði. Ástæðan fyrir útbreiðslu þess er líklega sú að það hentar sérlega vel fyrir ritvinnslu texta sem innihalda stærðfræðileg tákni eins og brotastrik, ferningsrætur og þess háttar því þau birtast á skjánum á nákvæmlega sama hátt og við útprentun.

Sniðmát verkefnaheftisins heitir The Legrand Orange Book og er það að finna á netinu. Höfundur þess er Mathias Legrand. Ég sótti það af slóðinni <http://www.latextemplates.com/>.

Eitt vil ég taka fram varðandi verkefnaheftið sem er þó smávægilegt. Allar teikningar í því, hvort sem þær eru gagnvirkar eða ekki, eru teiknaðar í forritinu GeoGebra eins og áður hefur komið fram. Í íslensku ritmáli er hefð fyrir því að notuð sé komma til að marka upphaf tugabrots innan talna sem eru ekki heilar. Í GeoGebra er komman í raun frátekið tákni og notað sem aðgreinir í ýmsum skipunum þess. Af þeirri ástæðu er ritháttur talna, sem eru ekki heilar, amerískur í þeim skilningi að notaður er punktur en ekki komma í tugabrotum. Af þeirri ástæðu gæti borið á lítils háttar ósamræmi þegar ég nota kommu fyrir tugabrot í textum en notaður er punktur á teikningum. Því er það svo að ef strik er t.d. málsett sem 4,3 sentimetrar kemur það fram sem 4.3 á teikningunum.

4.2 Vídeóin

Langstærsti hluti tímans, sem fór í að vinna þetta verkefni, fór í vídeógerð. Vegna talsverðar reynslu minnar og áhuga á GeoGebra ákvað ég að hafa ýmsar afurðir, sem ég bjó til í GeoGebra, sem meginatriði sviðsmyndarinnar. Verkið var að langstærstum hluta gert með skjáupptökum með forriti sem nefnist Camtasia Studio 8. Það sem forritið gerir í vinnu sem þessari er einkum þrennt:

Í fyrsta lagi var það notað til þess að taka upp það sem birtist á skjánum hjá mér og þá ýmist öllum skjánum eða vel skilgreindum hluta hans. Ýmist var tekið upp með eða án hljóðs og ýmist með eða án vefmyndavélarinnar sem er innbyggð í tölvunni. Forrit sem gera þetta nefnast á ensku Screen-Capturing software.

Í öðru lagi notaði ég það til þess að vinna vídeóin. Það felur í sér að klippa þau, hækka eða lækka hljóðið, finna upptökum vefmyndavélarinnar pláss á skjánum (mynd í mynd), setja inn tónlist, láta litla ramma eða önnur tákni birtast í nokkrar sekúndur til áhersluauka (e. callouts), auk þess sem ég lét heiti hvers vídeós birtast í upphafi þess á sérstökum bakgrunni með upphafsstefi sem er eins í öllum vídeóunum. Auk þess setti ég sums staðar inn ýmsar sjónrænar brellur (e. transitions) þegar klippt var milli einstakra skjámynda.

Í þriðja lagi þjappar forritið allri klippivinnslu saman (e. rendering video) í lokafurðina sem er yfirleitt vídeóskrá. Hægt er að velja um margar skráartegundir vídeóa eins og t.d. MP4, WMV, MOV, AVI og M4V. Einnig er hægt að hala framleiðslunni upp með stöðluðum skráartegundum fyrir Screencast.com, Google Drive eða YouTube. Vídeóin voru því framleidd frá a til ö með forritinu Camtasia Studio sem aðalverkfæri.

Allir sjónrænir þættir vídeóanna voru gerðir í forritinu GeoGebra og voru þá ýmist hannaðar hreyfimyndir í forritinu eða margar kyrrar myndir látnar birtast hver á eftir annarri með svokallaðri stop-motion-upptökutækni. Þekkingu mína í stuttmyndagerð öðlaðist ég að langstærstum hluta hjá Torfa Hjartarsyni og Björgvini Ívari Guðbrandssyni í áfanganum margmiðlun til náms og kennslu, sem ég tók sem hluta af bundnu vali á sérsviði mínu í meistaranáminu, menntun framhaldsskólakennara, og er ég þeim félögum mjög þakklátur fyrir góða kennslu.

Vídeóin eru öll stutt og aldrei lengri en 15 mínútur. Í þeim tilfellum þar sem nauðsynlegt var að fjalla um einhvern námsþátt á lengri tíma var þeim skipt í tvo hluta svo ég gæti haldið mig við þessa einföldu vinnureglu sem ég setti mér. Ef vídeóin eru lengri en 15 mínútur þá vex það frekar nemendum í augum að horfa á þau (Bergmanns og Sams, 2012). Í rannsókn meðal nemenda Keilis kannaði Ragnhildur Eva Guðmundsdóttir (2014) meðal

annars hvað nemendum þætti vera æskileg lengd á fyrirlestrum. Niðurstöðurnar voru á þann veg að 32% aðspurðra svöruðu að lengdin ætti að vera 5–10 mínútur. Alls 59% aðspurðra töldu 10–15 mínútur vera æskilega lengd en 9% nemenda töldu æskilega lengd vera 15–20 mínútur.

4.3 Val á vefkerfi

Vefkerfið, sem ég notaði fyrir notendaviðmót og smíði vefsins, heitir Weebly. Ástæða þess að það varð fyrir valinu er að það er mjög einfalt í notkun auk þess sem ég fann notendaviðmót í því sem mér finnst fagurfræðilega vel heppnað. Weebly inniheldur alla þá möguleika sem ég þurfti á að halda við vefsmíðina, eins og t.d. að hala upp vídeóum svo eitthvað sé nefnt. Ekki er þörf á neinni þekkingu á forritun eða html-kóðun þó að slíkt hjálpi alltaf til. Í vefkerfinu Weebly eru engin mörk á hámarksfjölda vídeóa og í raun er hægt að setja eins mörg vídeó inn á vefinn og maður óskar svo framarlega sem ekkert eitt þeirra ná heilu gígabæti að stærð.

Töluverður útlitsmunur er á vefnum eftir því hvort hann er skoðaður í tölvu eða snjalltæki. Ástæðan fyrir því er að Weebly-vefkerfið er forritað þannig að ef vefurinn er opnaður í snjallsíma eða spjaldtölvu birtist sjálfkrafa sérstök útgáfa af vefnum sem hentar betur fyrir tæki með lítinn skjá og er það vel. Vilji notendur snjalltækja einhverja hluta vegna ekki nota farsímaútgáfuna (e. mobile version) geta þeir valið almennu útgáfuna og er það gert alveg neðst á skjánum þegar vefurinn er skoðaður í snjalltæki.

Persónulega mæli ég frekar með því að vefurinn sé notaður í tölvu en í snjalltæki af þeirri einföldu ástæðu að skjámyndin er stærri í tölvu. Stundum er þó síminn við höndina en ekki tölva og því vildi ég velja vefkerfi sem tæki einnig tillit til snjalltækjæigenda.

Í Weebly eru vídeó sett inn á vefinn í tveimur skrefum. Fyrst þarf að hala upp vídeóskránni af tölvunni en síðan kóðar Weebly vídeóið áður en það er tilbúið til birtingar. Þetta er gert vegna þess að vefsíðurnar, sem innihalda vídeó, eru með innbyggðan vídeóspilara sem á að virka í öllum stýrikerfum og í öllum vöfrum. Notandinn þarf með öðrum ekkert sérstakt forrit til að spila vídeóin.

Weebly er þó ekki gallalaust. Það þarf að kaupa uppfærslu af því til þess að verk eins og þetta sé hreinlega framkvæmanlegt. Sú útgáfa, sem er á ókeypis, leyfir t.d. ekki að hægt sé að setja inn vídeó öðruvísi en að það sé gert í gegnum YouTube. Í þeirri útgáfu er auglýsing frá Weebly við fót síðunnar auk þess sem fjöldi undirsíðna er takmarkaður.

5 Lokaorð

Margt bendir til þess að víða sé pottur brotinn í stærðfræðikennslu unglinga á Íslandi. Nefni ég þá bæði mína persónulegu reynslu af námsaðstoð við einstaklinga auk skýrslu sem nýlega var gefin út um úttekt á stærðfræðikennslu í níu framhaldsskólum. Stærðfræðikennsla hefur að mínu mati breyst allt of lítið eða að minnsta kosti ekki á þann veg að nemendur nái meiri tengslum við greinina og þeim árangri sem þeir þurfa til að geta nýtt stærðfræðina, sem þau læra, í frekara nám í stærðfræði eða öðrum fögum.

Hugsanlega hafa kennarar og skólayfirvöld sofnað á verðinum vegna þess hve lítið stærðfræðin sjálf hefur breyst öfugt við hina hröðu þróun sem hefur orðið í upplýsingatækni. Sú þróun, sem á sér stað innan stærðfræðinnar, er hulin nemendum svo að hinn almenni nemandi hefur mjög þrönga mynd af því hvað stærðfræði er. Einnig hefur mér fundist margir kennarar vera hræddir við að innleiða upplýsingatækni af fullum þunga í stærðfræðikennslu. Staðreyndin er sú að nemendur eru mannlegir og gleyma stundum kennslubókunum heima eða nenna ekki að taka þær með því þær þyngja töskur þeirra. Þeir gleyma þó sjaldnast snjallsímunum sínum og því fannst mér heillandi viðfangsefni að gera tilraun með að þróa námsefni og námskrá fyrir heila námseiningu í stærðfræði á vefnum án kennslubókar.

Spurning mín var hvernig vefurinn geti verið betra námsefni en það sem fyrir er. Svarið er að vefurinn byggir á gagnvirkni, margmiðlun og vídeóum svo að framsetningin á námsefninu er miklu fjölbreyttari heldur en í hefðbundinni prentaðri kennslubók.

Ég held að algengustu orsakir vandamála nemenda við að læra stærðfræði stafi af því að hugtök hennar hafi litla sem enga merkingu í hugum þeirra. Ég lagði því höfuðið í bleyti og reyndi að átta mig á hvað ég gæti helst gert til að skapa þessum hugtökum einhverja merkingu í hugum nemenda og niðurstaðan var sú að fjalla um vigra og hornaföll sérstaklega sökum þess hve sjónræn þessi fyrirbæri eru í raun.

Það er vel hugsandi að vefurinn muni stækka að umfangi á komandi árum, með fleiri vídeóum, fleiri verkefnum eða á einhvern annan hátt notendum hans til hagsbóta.

Fróðlegt verður að fylgjast með þróun námsefnis á næstu árum eða áratugum því við erum stödd á tímum mikilla breytinga í upplýsingatækni auk þess sem hugmyndir þjóðfélagsins um menntun eru að breytast.

Heimildaskrá

- Aðalnámskrá framhaldsskóla 1999: Stærðfræði/1999.
- Aðalnámskrá framhaldsskóla: Almennur hluti 2011/2011.
- Andri Ísaksson. (1983). Námskrárgerð og námskrárfræði. Í Sigurjón Björnsson (ritstjóri), Athöfn og orð: Afmælisrit helgað Matthíasi Jónassyni áttæðum (bls. 25–44). Reykjavík: Mál og menning.
- Anna Helga Jónsdóttir, Eggert Briem, Freyja Hreinsdóttir, Freyr Þórarinsson, Jón Ingólfur Magnússon og Rögnvaldur G. Möller (2014). Úttekt á stærðfræðikennslu í framhaldsskólum. Sótt af <http://www.menntamalaraduneyti.is/media/frettir2014/Uttekt-a-staerdfraedikennslu-i-framhaldsskolum-2014.pdf>
- Appova, A. og Berezovski, T. (e.d.). Commonly identified student's misconceptions about vectors and vector operations. (Tímarits ekki getið.) Sótt af http://pzacad.pitzer.edu/~dbachman/RUME_XVI_Linked_Schedule/ume16_submission_47.pdf
- Bergmann, J. og Sams, A. (2012). Flip your classroom: Reach every student in every class every day. Washington DC: Iste.
- Björnsgrá, I. og Erstad, G. (1991). Stærðfræði 2SN fyrir framhaldsskóla (Eygló Guðmundsdóttir þýddi). Reykjavík: Ísafold (frumútgáfa 1986).
- Butt, A. (2014). Student views on the use of a flipped classroom approach: Evidence from Australia. *Business Education and Accreditation*, 6(1), 33–43. Sótt af <http://www.theibfr.com/ARCHIVE/BEA-V6N1-2014-revised.pdf#page=35>
- GeoGebra. (2015, 12. apríl). Dynamic mathematics for learning and teaching. Sótt af <http://geogebra.org>
- Guðlaug Ragnarsdóttir. (2013). „Lokið tölvunum“: Framhaldsskólakennari rýnir í starf sitt (óútgefin meistaraaritgerð). Háskóli Íslands: Reykjavík. Sótt af <http://hdl.handle.net/1946/16833>
- Gür, H. (2009). Trigonometry learning. *New Horizons in Education*, 57(1), 67–80.

- Hlín Ágústsdóttir. (2011). Uppgötvunarnám með GeoGebra, (óútgefin meistararitgerð). Háskóli Íslands, Reykjavík Sótt af <http://hdl.handle.net/1946/7538>
- Keilir. (2015, 20. apríl). Vendikennsla-spegluð kennsla. Sótt af <http://www.keilir.net/haskolabru/nam/um-haskolabru/speglud-kennsla>
- Kilpatrick, J. (2009). The mathematics teacher and curriculum change. PNA, 3(3), 107–121. Sótt af <http://funes.uniandes.edu.co/581/1/KilpatrickJ09-2937.pdf>
- LaTeX templates. (2015, 23. apríl). Books: The Legrand orange book. Sótt af <http://www.latextemplates.com/cat/books>
- Lockhart, P. (2009). A mathematician's lament. New York: Bellevue.
- Lög um framhaldsskóla nr. 92/2008.
- Páll Skúlason. (1987). Er hægt að kenna gagnrýna hugsun? Í Pælingar: Safn erinda og greina (bls. 67–92). Reykjavík: Ergo.
- Presmeg, N. (2006). Research on visualization in learning and teaching mathematics. Í Angel Gutiérrez og Paolo Boero (ritstjórar), Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future (bls. 205–236). Rotterdam: Sense. Sótt af: <http://www.kaputcenter.umassd.edu/downloads/symcog/bib/pmeVisualizationFinalAPA.pdf>
- Ragnhildur Eva Guðmundsdóttir. (2014). „Spegluð kennsla er snilld“: Rannsókn á viðhorfi gagnvart speglaðri kennslu (óútgefin meistararitgerð). Akureyri: Háskólinn á Akureyri. Sótt af <http://hdl.handle.net/1946/18728>
- Rakel Margrét Viggósdóttir. (2014). „Kennarinn nýtist betur“: Rannsókn á speglaðri kennslu (óútgefin meistararitgerð). Akureyri: Háskólinn á Akureyri. Sótt af <http://hdl.handle.net/1946/18729>
- Sigfríður Guðný Theódórsdóttir. (2010). „Það verður bara að kenna það sem til er“: Hugmyndir stærðfræðikennara um námsefni (óútgefin meistararitgerð). Reykjavík: Háskóli Íslands.
- Solomon, Y. (2009). Mathematical literacy: Developing identities of inclusion. London: Routledge.
- Walker, D. F. og Soltis, J. F. (2009). Curriculum and Aims. New York: Teachers College Press.

- Stylianou, D. (2001). On the reluctance to visualize in mathematics: Is the picture changing? Í M. van den HeuvelPanhuizen (ritstjóri), Proceedings of the 25th annual conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education 4 (bls. 225-232).
- TechSmith. (2015, 15. maí). Camtasia: Screen recording and video editing. Sótt af <https://www.techsmith.com/camtasia.html>
- Wolfram, C. (2015, 20. apríl). Teaching kids real math with computers. Sótt af http://www.ted.com/talks/conrad_wolfram_teaching_kids_real_math_with_computers.html
- Zengina, Y., Furkanb, H., og Kutluca, T. (2011). The effect of dynamic mathematics software geogebra on student achievement in teaching of trigonometry. *Procedia Social and Behavioral Sciences* (31) 183-187. doi:10.1016/j.sbspro.2011.12.038