



Leyf mér að tala

Áhrif samskipta í stærðfræðikennslu

Jóna Þórdís Eggertsdóttir

Lokaverkefni til B.Ed.-prófs

Deild faggreinakennslu



HÁSKÓLI ÍSLANDS
MENNTAVÍSINDASVIÐ

Leyf mér að tala

Áhrif samskipta í stærðfræðikennslu

Jóna Þórdís Eggertsdóttir

Lokaverkefni til B.Ed.-prófs í grunnskólakennslu með áherslu á stærðfræði

Leiðbeinandi: Guðbjörg Pálsdóttir

Deild faggreinakennslu
Menntavísindasvið Háskóla Íslands
September 2019

Leyf mér að tala: Áhrif samskipta í stærðfræðikennslu

Ritgerð þessi er 10 eininga lokaverkefni til B.Ed.-prófs
í grunnskólakennslu með áherslu á stærðfræði við Deild faggreinakennslu,
Menntavísindasviði Háskóla Íslands

© Jóna Þórdís Eggertsdóttir 2019

Óheimilt að afrita ritgerðina á nokkurn hátt nema með leyfi höfundar.

Ágrip

Þessi ritgerð er lokaverkefni mitt til B.Ed. prófs í grunnskólakennslu með áherslu á stærðfræði við Háskóla Íslands. Kennsluhættir í stærðfræði hafa tekið hægfara breytingum í gegnum tíðina og hafa gamlar hefðir ráðið ríkjum þrátt fyrir að ný þekking komi til sögunnar. Hefðbundin stærðfræðikennsla skilar ekki viðunandi námsárangri þar sem nemendur verða eins og hugsunarlausar reiknivélar og geta ekki notað þekkingu sína. Til eru aðferðir sem hvetja nemendur til hugsunar þar sem betur er hlúð að alhliða færni í stærðfræði. Eitt af því sem skilur þessar aðferðir að eru samskiptin í skólastofunni. Markmið þessa verkefnis er að varpa ljósi á áhrif samskipta á nám og námsárangur grunnskólanema í stærðfræði. Þá er athugað hvað felst í samskiptum og hvað sé eftirsóknaverður námsárangur í stærðfræði. Niðurstöður verkefnisins sýna að samskipti eru órjúfanlegur hluti í kennslu og námi nemenda. Allri þekkingu er miðlað og hún metin með einhvers konar samskiptum hvort sem það er með tali, táknum eða riti. Þá er bæði mikilvægt að skapa uppbyggjandi námsumhverfi með jákvæðum samskiptum sem og að gefa nemendum tækifæri til að tjá sig og sínar hugmyndir.

Efnisyfirlit

Ágrip	3
Formáli	5
1 Inngangur	6
2 Almennt um námsárangur og samskipti	7
2.1 „Góður námsárangur“	7
2.2 Stærðfræðilegt læsi	8
2.3 Samskipti í skólastofunni	9
2.4 Jákvæð samskipti og skólabragur	10
2.5 Samantekt.....	11
3 Stærðfræðináms og -kennsla	12
3.1 „Til hvers þurfum við að læra stærðfræði?“	12
3.2 Kennsluhættir	13
3.3 Reikningur eða skilningur	14
3.4 Tengsla- eða tækniskilningur.....	16
3.5 Samantekt.....	17
4 Árangursríkir kennsluhættir	19
4.1 Árangursríkar breytingar á kennsluháttum	19
4.2 Hugsandi skólastofa.....	20
4.3 Skipulag kennslustundar.....	22
4.4 Val á verkefnum.....	22
4.5 Samantekt.....	23
5 Niðurstöður og umræður	25
6 Lokaorð	27
Heimildaskrá	28

Formáli

Við skil þessarar ritgerðar lýkur bakkalárnámi mínu í grunnskólakennslu með áherslu á stærðfræði. Þegar einum kafla lýkur hefst þó annar og styttest nú óðfluga í að ég taki mín fyrstu skref í stærðfræðikennslu. Í kennaranáminu hafa hugmyndir mínar um stærðfræðikennslu tekið miklum breytingum og sömuleiðis starfskenning mín. Ég vil því nýta tækifærið og þakka öllum kennurum Menntavísindasviðs fyrir góða kennslu og þá sérstaklega stærðfræðikennurunum fyrir að opna augun mín fyrir öllum þeim fjölbreyttu kennsluaðferðum sem val er um í stærðfræðikennslu. Sérstakar þakkir vil ég færa Guðbjörgu Pálsdóttur, leiðbeinanda mínum, fyrir ánægjulegt samstarf og góða leiðsögn. Að lokum vil ég þakka fjölskyldu og vinum fyrir að veita mér stuðning og aðstoð í gegnum námið.

Þetta lokaverkefni er samið af mér undirritaðri. Ég hef kynnt mér *Síðareglur Háskóla Íslands* (2003, 7. nóvember, <http://www.hi.is/is/skolinn/sidareglur>) og fylgt þeim samkvæmt bestu vitund. Ég vísa til alls efnis sem ég hef sótt til annarra eða fyrri eigin verka, hvort sem um er að ræða ábendingar, myndir, efni eða orðalag. Ég þakka öllum sem lagt hafa mér lið með einum eða öðrum hætti en ber sjálf ábyrgð á því sem missagt kann að vera. Þetta staðfesti ég með undirskrift minni.

Hafnarfirði, 17. ágúst 2019

Jóna Þórdís Eggertsdóttir

1 Inngangur

Lengi hefur fólk metið gáfur náungans út frá getu hans í stærðfræði. Þannig eru þeir sem fá góðar einkunnir í stærðfræði taldir klárir en þeir sem fá lágar einkunnir heimskir. Þrátt fyrir vitneskju um að einkunnir í stærðfræði segi ekki allt um gáfur manns eru þær enn notaðar til flokkunar í samfélaginu (Boaler 2016). Í Bandaríkjunum er nemendum getuskipt eftir einkunnum og árangri í stærðfræði en þeir sem fara í slakari hópana fá aldrei aðgengi að hærra stigs stærðfræðinámi og þar með er aðgengi þeirra að hinum ýmsu náms- og starfsmöguleikum takmarkað. Á Íslandi ríkir hugmyndafræði skóla án aðgreiningar (Anna Kristín Sigurðardóttir o.fl., 2014). Hún gengur út á það að allir eigi að fá að stunda nám við hæfi og fá jöfn tækifæri óháð atgervi og aðstæðum. Þá eigi skólar að koma til móts við náms- og félagslegar þarfir hvers og eins nemenda og búa þeim jöfn tækifæri til þátttöku í lýðræðislegu samfélagi. Hér er nemendum ekki getuskipt líkt og í Bandaríkjunum og er menntun nokkuð aðgengileg öllum. Það leynir sé þó ekki að geta í stærðfræði auki möguleika fólks í framhaldsnámi, þá sérstaklega í raunvísindum.

Grunnskólanemendur á Íslandi ættu að fá sambærilega kennslu en nær hún til allra eða einungis takmarkaðs hóps? Það er efni í enn stærri rannsókn en hægt er að gera á þessu stigi en á sama tíma einn hvatinn fyrir vali á viðfangsefni. Í stærðfræðikennslu eru fastmótaðar hefðir þar sem nemendur er móttakendur og kennarar uppspretta þekkingar. Fjöldi rannsókna hafa sýnt að þær skila ekki viðunandi árangri (Herbel-Eisenmann, 2009) en þrátt fyrir það falla margir stærðfræðikennarar í gryfju þægindarammans og mata nemendur sína á reglum og aðferðum svo þeir geti leyst reikningsdæmi. Hvaða aðferð er þá best fyrir ný útskrifaðan stærðfræðikennara að tileinka sér? Nemendur grunnskólans eru eins ólíkir og þeir eru margir og því gefur það augaleið að engin ein kennsluaðferð sé best fyrir alla. Það að tileinka sér góða framkomu skiptir miklu máli og þar á meðal samskiptin við nemendur. Markmið ritgerðarinnar er að varpa ljósi á áhrif samskipta í stærðfræðinámi á námsárangur grunnskólanemenda. Efninu er skipt niður í þrjá kafla þar sem byrjað er á að ræða lykilhugtökin *námsárangur* og *samskipti*. Því er fylgt eftir með umfjöllun um það sem telst vera eftirsóknarvert í stærðfræðikennslu. Þá eru teknir saman kennsluhættir sem rannsóknir sýna að skili árangri. Að lokum er efni ritgerðarinnar dregið saman og niðurstöður ræddar.

2 Almennt um námsárangur og samskipti

Í þessum kafla eru hugtökin *námsárangur* og *samskipti* skoðuð. Fyrst verður hugtakið *námsárangur* skilgreint og í framhaldi rætt hvaða merkingu það hefur að ná góðum árangri og hvort það sé í samhengi við tilgang náms. Næst verður hugtakið *samskipti* skilgreint og hvað felst í samskiptum í skólastofunni. Þá verður rætt um ólík samskiptaform og hvaða tilgangi þau sinna í kennslu.

2.1 „Góður námsárangur“

Í *Íslenskri orðabók* (e.d.) er námsárangur skilgreindur sem sá þekkingar- og þroskaauki sem fengist hefur með námi. Tilgangur náms hlýtur því að vera að nemendur nái námsárangri, það er að segja að með námi aukist þekking þeirra og þroski. Ingvar Sigurgeirsson (2000) telur mikilvægt að við undirbúning kennslu spyrji kennari sig hvaða tilgangi kennslan á að sinna og setji fram markmið, sem geta þó tekið breytingum þegar á líður. Þannig er kennari að skýra, bæðu fyrir sjálfum sér og öðrum, hvaða árangri hann vill ná. Kennarar í grunnskólum hafa ekki alveg frjálsar hendur um hver tilgangur náms sé. Í aðalnámskrá grunnskóla (2013) eru sett fram hæfniviðmið sem lýsa hvaða hæfni nemendur eiga að öðlast í grunnskóla. Með því eru settar kröfur á kennara um að ná ákveðnum árangri með nemendum og um leið sýna fram á námsárangur nemenda. Kennarar þurfa þá að meta árangur nemenda og skilgreina sem oftast er gert með námsmati og gefin einkunn eftir frammistöðu á því. Góð einkunn lýsir þá góðum námsárangri og því verður eftirsóknavegt að ná góðum eða háum einkunnum.

Til að nemandi fái góða einkunn þarf hann að sýna þekkingu á viðfangsefni og hæfni í að beita þeirri þekkingu á námsmati. Samkvæmt *Íslenskri nútímamálsorðabók* felst hugtakið *námsárangur* í því hvernig nemandi gengur að tileinka sér námsefni og að sá árangur sé ýmist mældur með prófum eða verkefnum (Stofnun Árna Magnússonar í íslenskum fræðum, e.d.). Þessi útskýring lýsir vel hvaða merkingu almenningur leggur í hugtakið. Það er ekkert leyndarmál að námsmat spilar stórt hlutverk í íslensku menntakerfi. Skólar veita nemendum viðurkenningar fyrir framúrskarandi árangur til dæmis í Háskóla Reykjavíkur en þar fá nemendur með hæstu einkunnirnar peningastyrk. Samræmdu prófin eru annað skýrt dæmi en þegar niðurstöður liggja fyrir er ekki óalgengt að sjá fyrirsagnir á borð við „Gleðjast yfir niðurstöðu samræmdra prófa“ (2016) þar sem skólar eru lofaðir fyrir góðan árangur sé meðaleinkunn vel yfir landsmeðaltali og talað um óásættanlega frammistöðu séu skólar langt undir meðaltali.

Samkvæmt viðmiðum í samfélaginu felst góður námsárangur í að skora hátt á prófi eða öllu heldur að skora hærra en aðrir að prófi. Próf geta kannað allt milli himins og jarðar, til dæmis hverjum þykir skemmtilegast að læra, hverjir geta yfirfært þekkingu á ólíkar

aðstæðum og hverjir hafa besta minnið. Uppbygging þeirra og tilgangur fer eftir kennurum og markmiðum. Það eitt er víst að próf spila stórt hlutverk í menntakerfinu.

Grunnskólakennarar í Reykjanesbæ nýta til að mynda niðurstöður samræmdra prófa til að sjá hvað megi gera betur (Gleðjast yfir niðurstöðu samræmdra prófa, 2016). Þar hefur markvisst verið unnið að því að bæta og skipuleggja kennsluna þannig að nemendur sýni betri árangur í samræmdum prófum, meðal annars með því að leggja áherslu á að nemendur öðlist skilning á efninu og að inntakið sé fest í minni með endurtekningu.

2.2 Stærðfræðilegt læsi

PISA könnunin sem lögð er fyrir 15 ára nemendur í OECD-ríkjunum er ein þeirra aðferða sem notuð er til að fylgjast með námsárangri (Meyvant Þórólfsson, 2003). Þar er borinn saman árangur milli OECD-ríkjanna og þróun hvers lands fyrir sig skoðuð. Markmið PISA könnunarinnar er að athuga hvort nemendur séu tilbúnir til að mæta þeim áskorunum framtíðarinnar er lúta að því að geta greint, rökstutt og miðlað hugmyndum og hvort þeir hafi öðlast þá hæfni að halda áfram að læra og þroskast út ævina. Þá er meðal annars skoðað stærðfræðilegt læsi sem felur í sér að geta nýtt hugtök, tákni og aðferðir til að skilja umheiminn. Lögð er áhersla á að skoða sýn nemenda á mikilvægar hugmyndir og hugtök með því að kanna skilning þeirra á ýmiss konar tengslum og mynstrum veruleikans. Stærðfræðilegt læsi auðveldar dagleg störf, sérstaklega í heimi tækninnar þar sem er stöðugt áreiti og þess krafist að fólk vinni hratt úr allskyns upplýsingum (Meyvant Þórólfsson, 2003).

Niðurstöður PISA könnunarinnar gefa upplýsingar um stærðfræðilegt læsi nemenda við lok grunnskóla og telur Meyvant (2003) mikilvægt að nýta þær við úrbætur á menntastefnu Íslands. Menntastefna birtist í lögum og námskrám sem skólum er skylt að fylgja (Stjórnarráð Íslands, e.d.). Grunnskóli er eina skólastigið sem öllum er skylt að sækja og því mikilvæg stoð í menntakerfinu. Þrátt fyrir að finna megi vankanta á PISA könnuninni þá gefur hún upplýsingar um þá hæfni sem börn hafa öðlast við lok grunnskóla. Í núgildandi menntastefnu fyrir grunnskóla er áhersla lögð á að búa nemendur undir að verða þátttakendur í lýðræðisþjóðfélagi (Aðalnámskrá grunnskóla, 2013). Stærðfræðilegt læsi eykur getu fólks til að taka þátt í samfélaginu. Stór hluti upplýsinga og opinberrar umræðu er rökstuddur á máli stærðfræðinnar ásamt því að hæfni í stærðfræði er forsenda læsis og sköpunar á flestum sviðum tækni, fræða og verkmenningar. Námsgreinin spilar því stórt hlutverk í menntun allra. Lilja Alfreðsdóttir (2018), núverandi mennta- og menningarmálaráðherra Íslands, ítrekar mikilvægi þess að Ísland hafi skýra menntastefnu sem þjóni öllum. Hún segir menntakerfið spila lykilhlutverk í samfélaginu því þar gefist tækifæri til að efla hugvit og verkþekkingu. Við mótun nýrrar menntastefnu telur Lilja því að nálgast verði menntakerfið

sem heild og að það þurfi að vera sveigjanlegt og tilbúið til að takast á við áskoranir framtíðarinnar og aðlaga sig þeirri tækniþróun sem einkenni hvern tíma.

Meyvant (2003) vill að áhersla sé lögð á fjölbreytta kennsluhætti í stærðfræði. Hann telur góða stærðfræðikennslu fela í sér sjálfstæðar rannsóknir nemenda, þrautalausnaaðferðir, tengingu við daglegt líf, beina kennslu og æfingadæmi af ýmsu tagi. Nemendur eru ólíkir og ýmiss konar námsaðferðir henti þeim. Því sé mikilvægt að nálgast viðfangsefni með fjölbreyttum hætti og hafa nám einstaklingsmiðað. Máli sínu til stuðnings notar Meyvant kenningar um hugsmíði en þar er þekking sögð vera eins og net af hugtökum og hugmyndum um veruleikann. Því þéttara sem netið er þeim mun sterkara verður það, það er að segja að því meira sem þekkingin tengist því betri verður skilningurinn. Taka þurfi mið af forþekkingu nemenda og hafa samfellu í námi til að þetta þekkingarnet þeirra og þar með efla skilning á umheiminum. Til þess þarf kennari að hlusta eftir þekkingu og hugmyndum nemenda og nálgast viðfangsefni með tilliti til þess en ekki út frá uppbyggingu námsbóka.

2.3 Samskipti í skólastofunni

Til að fá fram hugmyndir og þekkingu nemenda þarf kennari að eiga í samskiptum við nemendur. Samskipti fela í sér notkun tákna til að senda boð á milli (Friðrik Jónsson og Jakob Smári, 2004). Fólk er í stöðugum samskiptum hvert við annað þar sem það sendir frá sér merki sem aðrir taka við og túlka. Samskipti geta farið fram á ólíkum vettvangi hvort sem það er með tali, táknum, riti, svipbrigðum eða augnsambandi. Samskipti eru alls konar. Margir geta átt í samskiptum hver við annan, einn við marga og einn við sjálfan sig svo dæmi séu tekin. Hlutverk fólks í samskiptum er líka breytilegt en fólk þarf bæði að fá að tjá sig og taka við boðum. Samskipti eru stór hluti af kennslu þar sem þekkingu er miðlað til nemenda í gegnum einhvers konar samskipti. Samskipti í skólastofu eru líka aðstæðubundin og geta verið allt frá eintali kennara yfir í jafningjaumræður. Ólíkt samskiptaform hefur ólíkan tilgang og því þurfa kennarar að taka mið af því í kennslu, það er að segja að skoða hvernig samskipti eru í stofunni og hvort hægt sé að breyta þeim til að ná betri árangri. Í núgildandi menntastefnu er lögð áhersla á að minnka leiðsögn byggða á því að kennari miðli þekkingu til nemenda yfir í nemendamiðað nám byggt á samskiptum (Mennta- og menningarmálaráðuneyti, 2012).

Í aðalnámskrá grunnskóla (2013, bls. 209-210) segir að megintilgangur stærðfræðináms sé „[...] að nemendur öðlist alhliða hæfni til að nota stærðfræði sem lifandi verkfæri í fjölbreyttum tilgangi og við ólíkar aðstæður.“ Þá segir að hæfni í stærðfræði feli í sér „[...] að geta tjáð sig með stærðfræði, útskýrt hugsun sína um hana fyrir öðrum, rökrætt um lausnaleyðir og sannreynt lausnir sínar og annarra.“ Morgan (2017) færir rök fyrir því að til

að nemendur öðlist færni í að tjá sig um stærðfræði þurfi þeir að fá tækifæri til að tjá sig, þá á hún við nemendamiðaða nálgun í kennslu. Hún segir að kennaramiðuð nálgun auki ekki getu nemenda til að tjá sig því óháð því hversu góð útskýringin er, sé ekki hægt að gera ráð fyrir að nemendur meðtaki upplýsingarnar. Þá segir hún að besta leiðin til að gera sér grein fyrir skilningi nemenda sé með samtali þar sem notað er táknerfi og orðaforði stærðfræðinnar. Gagnlegt getur verið að nota spurnaraðferðir, en þá notar kennari spurningar markvisst til að skapa og viðhalda umræðu í nemendahópnum. Þá áréttar hún einnig að ekki gefi allar spurningar kost á samtali. Þegar nemandi á til að mynda að fylla í eyður kennara þá sé það í raun ekki samtal og leggur hún áherslu á að kennarar spyrji spurninga sem fá nemendur til að hugsa.

Það er hægara sagt en gert að fá nemendur til að tjá sig um stærðfræði og þeim þykir alls ekki öllum auðvelt að tjá stærðfræðilegan skilning sinn. Morgan (2017) áréttar að samskipti í skólastofunni þurfi ekki að takmarkast við samskipti kennara og nemenda heldur sé einnig gott að nemendur eigi samtöl sín á milli. Þannig getur kennari aflað upplýsinga um skilning nemenda í gegnum hlustun. Þá segir hún að táknræn og myndræn tjáning sé hluti af stærðfræðilegu læsi. Margir lenda í vanda þegar þeir eiga að nýta táknerfi stærðfræðinnar til að tjá sig. Þá ítrekar Morgan (2017) þá ábyrgð sem liggur á kennurum um að kenna nemendum að tala og skrifa stærðfræðilega. Þeir þurfi að taka mið af forþekkingu þeirra þegar þeir ætla að auka stærðfræðilegan orðaforða og kynna ný tákni og hugtök þegar nemendur eru tilbúnir til að læra þau.

2.4 Jákvæð samskipti og skólabragur

Samskipti eru viðamikill þáttur í skólastarfi og ekki hægt að einangra þau við kennslu, hvað þá kennsluaðferðir. Fólk hefur þörf sem félagsverur til að eiga í uppbyggjandi samskiptum við sjálfan sig og aðra (Margrét Héðinsdóttir, Fanný Gunnarsdóttir og Erla Kristjánsdóttir, 2013). Jákvæð samskipti einkennast af virðingu, trausti og samkennd og eru viðamikill hluti af því sem skapa góðan skólabrag, það er að segja ríkjandi viðhorf og anda innan skóla. Í aðstæðum þar sem fólk hefur mismikil völd geta samskipti orðið ópersónuleg og á það oft við um samskipti milli kennara og nemenda. Kennarar eru þá í valdastöðu og telja sig þurfa að sýna vald sitt með boðum og bönnum. Latham (1997) hefur rannsakað samskipti í skólastofunni. Hann segir skólabrag sem einkennist af þvingun vera uppspretta mikils hluta hegðunarvandatilvika. Þá eru nemendur þvingaðir til að haga sér vel og læra með því að veita neikvæðri hegðun athygli með refsingu á meðan jákvæðri hegðun er veitt lítil sem engin athygli. Hann gerði rannsókn á samskiptum kennara og nemenda þar sem hann kenndi kennurum að eiga í jákvæðum samskiptum við nemendur. Niðurstöður leiddu í ljós að til að skapa gott

andrúmsloft þyrfti hlutfallið milli jákvæðra og neikvæðra samskipta að vera minnsta kosti átta jákvæðar athugasemdir á móti einni neikvæðri.

Jákvæður skólabragur er forsenda góðs vinnuanda og starfsgleði bæði nemenda og starfsfólks og því gífurlega mikilvægt að allir leggi sitt af mörkum til að viðhalda því. Vænlegast er að kenna börnum jákvæð samskipti með því að vera góð fyrirmynd. Það að vera góður í samskiptum felur bæði í sér að geta beitt virkri hlustun sem og að geta tjáð sig skýrt og skilmerkilega án þess að það sé á kostnað einhvers annars. Því þarf kennari bæði að leggja áherslu á að hlusta á það sem nemendur hans hafa að segja og að geta tjáð sig um það án þess að gera lítið úr hugmyndum þeirra.

2.5 Samantekt

Lengi hefur tíðkast að túlka námsárangur nemenda út frá einkunnum hans. Tilgangur náms í grunnskóla er þó ekki að ná fram góðum einkunnum heldur að efla hæfni barna og unglinga til þátttöku í lýðræðislegu samfélagi (Aðalnámskrá grunnskóla, 2013). Tilgangur náms í stærðfræði er að nemendur geti nýtt lærdóm sinn í ólíkum aðstæðum og verði stærðfræðilega læsir. Stærðfræðilegt læsi felur í sér að geta nýtt hugtök, tákni og aðferðir til að skilja umheiminn (Meyvant Þórólfsson, 2003). Til að þjálfar og meta stærðfræðilegt læsi nemenda þurfa kennarar að eiga í einhvers konar samskiptum við þá (Morgan, 2017). Samskiptin þurfa að vera fjölbreytt og gefa þarf nemendum tækifæri til að tjá sig um stærðfræði með stærðfræðilegri orðræðu. Rannsóknir hafa einnig sýnt fram á að jákvæð samskipti hafa jákvæð áhrif á námsárangur og minnka hegðunarvanda (Latham, 1997). Með jákvæðum samskiptum myndast uppbyggilegt andrúmsloft í skólastofunni þar sem nemendur eru líklegri til að taka þátt og tjá sig um stærðfræði.

3 Stærðfræðinám og -kennsla

Í þessum kafla verður fjallað um hvað felst í því að vera fær í stærðfræði og hvaða hlutverki samskipti í skólastofunni gegna til að nemendur öðlist færni í stærðfræði. Þá verða ólíkir kennsluhættir bornir saman út frá árangri nemenda og munurinn á samskiptaformunum ræddur.

3.1 „Til hvers þurfum við að læra stærðfræði?“

Fólk er stöðugt að velta fyrir hvaða tilgangi athöfn þjóni og hvort það taki því yfirhöfuð að framkvæma hana eða ekki, sérstaklega ef þeim þykir hún síður spennandi. Ward-Penny (2017) stærðfræðikennari segir algengt að nemendur velti fyrir sér tilgangi þess að læra stærðfræði. Hann segir efann vera af því góða og hvetji kennara til að setja sér skýr markmið svo tilgangurinn sé ljós. Í kjölfarið dregur hann fram sex ástæður fyrir því að það sé mikilvægt að hafa vald á stærðfræðilegri hugsun og vinnubrögðum. Hann segir stærðfræði hagnýta fyrir dagleg störf, undirbúning fyrir atvinnulífið, auki getu til að hugsa, efli hæfni fólks sem gagnrýna þjóðfélagsþegna, hafa sögulegan og fagurfræðilegan bakgrunn sem ekki megi gleymast og síðast en ekki síst sé stærðfræði hiklaust notuð sem flokkunartæki í samfélaginu og geti þannig takmarkað val ungmenna um náms- og starfsferil.

Efinn felst þó ekki endilega í hagnýtingu stærðfræði heldur eru nemendur að velta fyrir sér tilgangi þess að eyða tíma í að reikna það sem auðveldlega sé hægt að stimpla inn í forrit sem gerir það fyrir mann. Við lifum á tækniöld þar sem notkun tækja er orðin ómissandi hluti daglegs lífs. Johnston-Wilder og Pimm (2017) áréttu mikilvægi þess að tækni sé notuð í stærðfræðikennslu en þó við réttar aðstæður. Nemendur þurfa hafa ákveðna færni í stærðfræði til að geta notað tæknina sem hjálpartæki. Sér til stuðnings vitna þau til að mynda í rannsóknir sem sýna að notkun vasareiknis geti verið hamlandi áður en nemendur hafa öðlast ákveðna færni í stærðfræði en geti aukið talnalæsi þegar nemendur hafa öðlast slíka færni.

Kilpatrick og Swafford (2002) segja að stærðfræðifærni byggi á fimm þáttum sem eru skilningur, reikningur, beiting, röksemdarfærsla og þátttaka:

1. **Skilningur** (e. understanding) í stærðfræði felst í að vita hvers vegna stærðfræðileg hugmynd er mikilvæg og í hvaða samhengi hún sé gagnleg. Skilningur felur einnig í sér að tengja saman hugmyndir og sjá algeng mynstur úr ólíkum aðstæðum.
2. **Reikningur** (e. computing) felur í sér að geta notað helstu reikniaðgerðir eins og samlagningu, frádrátt, margföldun og deilingu lipurlega í huganum eða á blaði og vita hvenær og hvernig nota eigi aðgerðir með viðeigandi hætti.

3. **Beiting** (e. applying) felst í að geta notað bæði hugtaka- og aðgerðaskilning við lausnaleit. Hugtök og aðgerðir gagnast nemanda lítið ef hann veit ekki hvenær og hvernig hann á að nota þær. Nám á að gagnast við fjölbreyttar aðstæður og því verða skólaverkefni að teygja sig út í raunheiminn svo nemendur geti beitt þekkingu sinni í alls kyns aðstæðum.
4. **Röksemdarfærsla** (e. reasoning) felst í að geta hugsað rökrétt um tengsl milli hugmynda og aðstæðna og að geta brotið vandamál niður í þætti og séð tengslin milli þeirra.
5. **Þátttaka** (e. engagement) felst í því að nemendur þurfa að fá tækifæri til að takast á við stærðfræði. Nemendur þurfa að lenda í erfiðleikum og fá að yfirstíga þá til að tileinka sér það hugarfar að þeir geti lært stærðfræði með því að leggja sig fram. Þeir þurfa sjá tilgang þess að hafa stærðfræði á sínu valdi bæði í námi og starfi og að trúá að vinnan sem þeir leggja í námið muni skila sér.

Kilpatrick og Swafford (2002) segja alla þættina haldast í hendur og því þurfi nemendur að fá tækifæri til að þjálfa þá jafnt í gegnum alla skólagönguna eigi þeir að ná færni í stærðfræði. Það þarf ekki alltaf að þjálfa alla fimm þættina í einu en mikilvægt sé að byggja kennsluna þannig upp að á endanum hafi nemandi fengið æfingu í öllum þáttunum. Sumir kennarar hafa haldið því fram að þeir hafi ekki nægan tíma í kennslu til að hlúa að öllum þáttunum. Krafa sé um yfirferð á ákveðnu námsefni á litlum tíma og því sé ekkert svigrúm eftir í kennslunni. Kilpatrick og Swafford (2002) benda þá á að þegar hlúð er að öllum þáttunum í kennslu eigi nemendur auðveldara með að tileinka sér nýja þekkingu og þurfi því ekki að eyða eins miklu púðri í endurtekningu og að það geti því verið tímasparnaður til lengri tíma lítið. Þá benda þeir til dæmis á að hafi nemandi skilning á viðfangsefninu eigi hann auðveldara með að tileinka sér færni og sömuleiðis geti reiknikunnátta styrkt og þroskað skilning.

3.2 Kennsluhættir

Í stærðfræðikennslu, ekki bara á Íslandi heldur út um allan heim, hafa einhverra hluta vegna skapast fastmótaðar hefðir (Herbel-Eisenmann, 2009). Kennslan er kennaramiðuð þar sem kennari útskýrir aðferðir og reglur sem nemendur þjálfa með því að reikna dæmi, sem sagt endurtaka reikniaðferðir til að festa röð þeirra á minnið. Þegar kennarar spyrja spurninga eru þeir að leita að réttu svári en ekki að hugsun nemenda. Slík nálgun í kennslu beinir sjónum að reiknikunnáttu nemenda og veitir hinum fjórum þáttunum; skilningi, beitingu, röksemdarfærslu og þátttöku, litla sem enga athygli (Kilpatrick og Swafford, 2002). Kennslan verður einhæf og nær eingöngu til hluta nemendahópsins. Þessir fastmótuðu kennsluhættir hafa leitt til þeirra ranghugmynda að færni í stærðfræði sé meðfæddur hæfileiki og aðeins

fáir geti lært hærra stigs stærðfræði. Þær hugmyndir hafa smitast út í samfélagið og leitt til þess að stærðfræði er notuð til að flokka fólk í hópa eftir gáfum og takmarka val þeirra sem ekki hafa öðlast færni í stærðfræði um náms og starfsferil.

Rannsóknir hafa grafið undan þessum ranghugmyndum og sýnt fram á að allir geti lært stærðfræði. Færni í stærðfræði sé uppskera vinnu nemenda en ekki meðfæddur eiginleiki og að allskonar fólk með allskyns bakgrunn hafi náð framúrskarandi árangri í stærðfræði (Kilpatrick og Swafford, 2002). Þessar niðurstöður eru ekki nýjar af nálinni enda hafa fræðimenn lengi skoðað hvernig farsælast sé að nálgast stærðfræði þannig að sem flestir nái árangri. Á 9. og 10. áratugnum var mikil framþróun í hugmyndum um stærðfræðikennslu. Þá átti að hætta að leggja áherslu á reiknikunnáttu og leggja höfuð áherslu á skilning nemenda. Sums staðar fóru umbæturnar út í öfgar þar sem nemendur áttu hreinlega að uppgötva stærðfræði sjálfir með lítilli sem engri utanaðkomandi aðstoð. Það skilaði ekki heldur ásættanlegum árangri sem leiddi til þess að athyglinni varð enn frekar beitt að minni og reiknikunnáttu nemenda. Þá áttu nemendur að læra utanbókar fjölda reikniaðgerða kynntar frá kennara eða námsbókum. Síðan þá og jafnvel enn í dag hafa þessar öfgar tekist á (Kilpatrick og Swafford, 2002).

3.3 Reikningur eða skilningur

Boaler (1997) gerði stóra rannsókn í Bandaríkjunum á 10. áratugnum þar sem hún bar saman reynslu um 300 nemenda á stærðfræði eftir að hafa upplifað andstæða kennsluhætti. Boaler fylgdi nemendum eftir í þrjú ár eða frá því þeir byrjuðu 9. bekk 13 ára gömul og þar til þeir luku 11. bekk 16 ára. Á þeim tíma fylgdist hún með upplifun nemenda út frá mörgum sjónarhornum til að mynda með viðtölum við nemendur, kennara og skólastjórnendur, bar saman námsmat skólanna og niðurstöður samræmdra kannana sem og muninn á lausnum nemenda á opnum verkefnum sem hún lagði fyrir. Nemendurnir komu úr tveimur skólum þar sem notaðar voru andstæðar nálganir í stærðfræðikennslu þrátt fyrir að vera sambærilegir að öðru leyti. Bakland nemenda var sambærilegt og sömuleiðis fyrri reynsla af stærðfræði.

Í öðrum skólanum var notuð kennaramiðuð nálgun þar sem kennarinn og námsbækur voru uppspretta þekkingar (Boaler, 1997). Reikniaðgerðir og reglur voru lagðar inn af kennara eftir leiðbeiningum námsbóka. Nemendur reiknuðu dæmi úr bókunum þar sem þeir festu í minni aðgerðir og reglur með endurtekningu. Námsbækur höfðu mikil áhrif á skipulag kennslunnar þar sem kennari fylgdi uppsetningu hennar. Sömuleiðis stjórnðu þær vinnuhraða nemenda en allir áttu að vera á sama tíma á sama stað. Þar var nemendum skipt í hópa eftir getu í upphafi unglingadeildar og færðust ekki eftir það.

Í hinum skólanum var nemendamiðuð nálgun (Boaler, 1997). Þar voru ekki notaðar námsbækur eða innlagnir frá kennara heldur byggðist kennslan á sjálfstæðum rannsóknum nemenda. Þar voru viðfangsefni eða þemu kynnt fyrir nemendum sem þeir rannsökuðu í að meðaltali þrjár vikur. Í upphafi hvers þema skilgreindu nemendur undir leiðsögn kennara ramma verkefni sem þeir rannsökuðu síðan út frá eigin hugmyndum og þekkingu á stærðfræði. Nemendur höfðu mikið svigrúm í náminu þar sem þeir réðu hvar þeir byrjuðu og hvert þeir stefndu í lausnaleit sinni. Þeir höfðu aðgengi að kennara en það var þó takmarkað þar sem margir nemendur voru í stofunni. Kennari leiðbeindi nemendum án þess að taka stjórnina úr þeirra höndum og lagði inn hefðbundin sannindi og reglur sem hjálpuðu þeim að halda rannsóknarvinnunni áfram.

Ekki reyndist mikill munur á frammistöðu nemendahópanna á samræmdum könnunum en gífurlega mikill munur var á upplifun og reynslu þeirra á stærðfræði (Boaler, 1997). Upplifun nemendahópsins sem fékk kennaramiðaða nálgun var nær eingöngu í gegnum námsbækur þar sem þeir leystu mikið af stuttum og lokuðum verkefnum. Verkefnin gáfu ekki færi á námi á hærra vitsmunastigi og það sem verra var að ef verkefni gáfu færi á hærra stigs námi tókst kennurum yfirleitt að loka þeim. Kennarar leituðust sjaldnast eftir hugmyndum nemenda heldur gáfu nemendum mjög nákvæmar leiðbeiningar svo þeim gafst aldrei tækifæri til að glíma sjálfir við stærðfræði. Upplifun þessa hóps af stærðfræði var heldur neikvæð þar sem þeim þótti námsefni einhæft og lítið frelsi bæði hvað varðar reikni-aðferðir og vinnuhraða. Þeir tengdu þessa neikvæðu upplifun við kennsluna frekar en fagið. Margir kvörtuðu undan því að allir þyrftu að vinna á sama hraða, sumum þótti erfitt að halda í við hópinn á meðan öðrum fannst haldið aftur af sér. Nemendur reiknuðu án þess að hugsa og fengu enga ánægju út úr náminu. Þegar þeir fengu að leysa þrautalausnarverkefni voru þeir ánægðari því þá fengu þeir frelsi, þurftu að hugsa og voru stoltir af niðurstöðum sínum. Þessi hópur taldi stærðfræði byggjast á reglum og aðgerðum. Við lausn á verkefnum þótti þeim mikilvægara að muna eftir reglum eða sambærilegum dæmum heldur en að reyna að skilja. Trú þeirra á mikilvægi þess að muna gerði það líka að verkum að þeir lögðu litla áherslu á skilning.

Upplifun hins hópsins, sem fékk nemendamiðaða kennslu, af stærðfræði var allt önnur (Boaler, 1997). Þar glímdu nemendur við verkefni sem voru opin frá upphafi til enda. Þeir unnu á eigin hraða og afköstuðu mismiklu og nálguðust viðfangsefni út frá ólíkum sjónarhornum. Kennararnir höfðu ekki fastmótaðar hugmyndir um hvernig nemendur ættu að leysa verkefnin og lögðu sig fram um að skilgreina ekki vinnuna fyrir nemendur. Nemendur áttu heiðurinn af niðurstöðum sínum og leituðu ekki eftir staðfestingu frá kennara um hvort lausn þeirra væri rétt heldur frekar hvort þeir væru á réttri braut eða hversu áhugaverð eða frumleg hugmynd þeirra væri. Upplifun þessa hóps af stærðfræði var misjöfn, allt frá því

að elska fagið yfir í það að hata það. Þeim sem líkaði nálgunin, líkaði við fagið en þeim sem líkaði hún ekki voru líklegri til að hata það. Mikil ábyrgð var sett á herðar nemenda sem fengu val um hversu mikilli vinnu þeir skiluðu. Ákveðnum hópi nemenda þótti frelsið of mikið og líkaði illa við að vera skilinn eftir með litlar sem engar leiðbeiningar. Flestum líkaði þó við fagið og þeir sem voru áhugasamir voru einnig vinnusamir. Þessi hópur skildi að stærðfræði snýst um að hugsa og sáu rannsóknartækifærin sem greinin býður uppá.

Helsti munurinn á upplifunum milli nemendahópanna fólst í því að þeir sem fengu nemendamiðaða kennslu voru ekki þvingaðir til að læra, þeir eyddu að meðaltali minni tíma í að læra og þegar þeir voru að vinna voru þeir að hugsa (Boaler, 1997). Nemendurnir sem fengu kennaramiðað kennslu upplifðu meiri þvingun og eyddu hlutfallslega meiri tíma í að reikna en þvingunin fékk þá ekki til að hugsa um stærðfræði. Þeir sem fengu nemendamiðaða kennslu sáu kosti þess að hafa stærðfræði á sínu valdi og gátu yfirfært þekkingu sína úr einum aðstæðum yfir í aðrar á meðan hinn hópurinn gat einungis yfirfært þekkingu milli sambærilegra verkefna.

Rannsókn Boaler (1997) sýnir okkur að hvorug öfganna í stærðfræðikennslu sinnir þörfum allra nemendanna. Hjá þeim sem fengu kennaramiðaða nálgun var nánast eingöngu hlúð að reiknikunnáttu, lítið var lagt upp úr skilningi, beitingu eða röksemdafærslu. Þeir voru ekki þátttakendur í eigin námi og gátu lítið nýtt sér þá þekkingu sem þeir lærðu í skólanum. Þeir sem fengu nemendamiðaða nálgun voru svo sannarlega þátttakendur í eigin námi og gátu beitt þekkingu sinni í mismunandi aðstæðum. Þeir höfðu sterkan skilning á því sem þeir höfðu lært og þurftu að geta fært rök fyrir niðurstöðum sínum. Þar var þó ekki hlúð eins vel að reiknikunnáttu sem olli því að einhverjir upplifðu sig týnda og vildu fá meiri leiðsögn. Kilpatrick og Swafford (2002) telja hagstæðast að ganga milliveginn milli öfganna og trúá að vænlegasta leiðin til að ná árangri í stærðfræðikennslu sé að hlúa jafnt að öllum færniþáttunum. Passa þarf að hafa kennsluna fjölbreytta eins og Meyvant (2003) bendir á en þegar viðfangsefni eru skoðuð út frá mörgum sjónarhornum er líklegra að kennslan skili sér til fleiri nemenda.

3.4 Tengsla- eða tækniskilningur

Togstreitan milli skilnings og reiknikunnáttu á sér fleiri hliðar. Algengur misskilningur er meðal fólks að ef aðili kann að reikna hafi hann skilning á viðfangsefninu (Kilpatrick og Swafford, 2002). Aðrir trúa að ef aðili hefur skilning þá komi færni í kjölfarið. Richard Skemp (1976) hefur rætt þessar andstæðu hugmyndir og segir að verið sé að ræða um tvönn konar skilning, það er tækniskilning (e. instrumental understanding) og tengslaskilning (e. relational understanding).

Tækniskilningur sem Skemp (1976) kallar einnig „reglur án raka“ felur í sér að þekkja hvaða aðferð á að nota en skilja ekki hvernig hún virkar. Í hefðbundinni stærðfræðikennslu öðlast nemendur oft tækniskilning. Mason og Johnston-Wilder (2006) lýsa slíkum nemendum sem móttakendum þar sem þeir fá alltaf nákvæma leiðsögn og þjálfu með sér þörf til að láta mata sig. Þeir leggja á minnið reglur og aðferðir og læra að reikna helling af dæmum en þeir eru ekki sjálfstæðir og skilja ekki endilega hvað þeir eru að gera þrátt fyrir að fá rétt svör. Skemp (1976) segir eftirsóknarvert fyrir nemendur að öðlast tengslaskilning.

Tengslaskilningur felur í sér að vita bæði hvernig og hvers vegna eigi að nota aðferðir. Hann felur í sér getu til að hugsa og tengja saman aðalatriði. Nemendur sem hafa góðan tengslaskilning hafa meira frumkvæði, þeir vilja reyna sjálfir við viðfangefni og spyrja spurninga í stað þess að láta mata sig. Skemp nefnir þó einnig að þeir sem hafa öðlast öflugan tengslaskilning hafi líka tækniskilning, það er að segja að stundum reikna þeir án þess að hugsa um hvers vegna þeir fari þá leið. Í sumum tilfellum er tækniskilningurinn auðsóttari og nemandi grípur í þær aðferðir sem hann þekkir og reiknar hugsunarlaust en samt sem áður er mikilvægt að kunna að staldra við og hugsa. Stærðfræðikennarar ættu því að einsetja sér að kenna þannig að nemendur efli tengslaskilning sinn.

Setja má muninn á tengsla- og tækniskilningi í samhengi við kenningar um hugsmiði. Þegar fólk verður fyrir áreiti flokkar það upplýsingarnar í skemu (Cherry, 2019). Skemu (e. schema) eru vitsmunalegar stoðir sem aðstoða manninn við að skipuleggja og túlka nýjar upplýsingar en hvert skema inniheldur upplýsingar um ákveðið efni. Stundum verður fólk fyrir reynslu sem passar við fyrri skemu, stundum þarf það að aðlaga þau að nýjum upplýsingum og stundum verður það fyrir reynslu sem passar ekki inn í neitt af þeirra skemum og þarf þá að búa til nýtt. Skemu gegna mikilvægu hlutverki í námi en þau hafa áhrif á hvernig fólk beinir athygli sinni, hversu fljótt það er að tileinka sér þekkingu og hefur áhrif á hvernig það túlkar upplýsingar. Það getur reynst erfitt að breyta skemum sem nú þegar eru til staðar. Nemendur sem einungis hafa tækniskilning eru stöðugt að búa til ný skemu sem innihalda ótengdar og takmarkandi upplýsingar um stærðfræðileg fyrirbæri. Þeir nemendur sem hafa tengslaskilningur eru aftur á móti stöðugt að uppfæra skema sem nú þegar er til staðar með nýjum upplýsingum. Þannig þéttist þekkingarnet nemenda með tengslaskilning sem leiðir til þess að skilningur þeirra á fyrirbærum verður öflugri og nær til fleiri þátta en þeirra sem einungis hafa tækniskilning.

3.5 Samantekt

Hægt er að færa mörg rök fyrir því hvers vegna það sé hagnýtt að læra stærðfræði. Kenna þarf þannig að nemendur geti nýtt kunnáttu sína við ólíkar aðstæður og verði færir í

stærðfræði. Háar einkunnir og námsmat endurspeglar því miður ekki alltaf hæfni nemenda í stærðfræði. Góð færni í stærðfræði felst ekki í að geta reiknað helling af dæmum heldur er hún flóknari. Færni í stærðfræði felst í að skilja hvernig og hvers vegna nota eigi reikniaðgerðir, geta beitt þeim við ólíkar aðstæður og fært rök fyrir niðurstöðum sínum. Kilpatrick og Swafford (2002) segja stærðfræðifærni byggja á fimm þáttum sem ávallt þurfi að haldast í hendur, það eru skilningur, reikningur, beiting, röksemdarfærsla og þátttaka. Í gegnum tíðina hafa myndast hefðir í stærðfræðikennslu þar sem notast er við kennaramiðaða nálgun. Þá matar kennari nemendur af upplýsingum sem veldur því að þeir verða móttakendur frekar en þátttakendur í eigin námi. Einnig hafa komið til sögunnar andstæðar nálganir þar sem nemandinn er uppspretta þekkingar og á sjálfur að uppgötva stærðfræðina. Rannsóknir hafa þó sýnt fram á að vænlegast sé að ganga millivegin og hlúa að öllum færniþáttum.

4 Árangursríkir kennsluhættir

Í þessum kafla verður fjallað um hvaða kennsluhættir og aðferðir hafa skilað góðum árangri í stærðfræðikennslu. Í framhaldi af því eru skoðuð verkfæri sem kennarar geta auðveldlega tileinkað sér í von um að ná betri árangri.

4.1 Árangursríkar breytingar á kennsluháttum

Ungur nemur, gamall temur. Framþróun í stærðfræðikennslu gerist of hægt, sérstaklega í ljósi þeirra hröðu tækniframfara sem einkenna nútímann. Of margir kennarar festast innan þægindaramma hefðbundinna kennsluaðferða og kenna eins og þeim var kennt burt séð frá því sem rannsóknir sýna. Þegar umbætur eru gerðar á menntastefnu þar sem krafist er breyttra kennsluhátta fallast þeim hendur og enda aftur í sama gamla gírnum. Fæstir sjá vandann og telja kennsluna í samræmi við þá þekkingu á kennslufræðum sem nú er til staðar, þrátt fyrir að raunin sé önnur. Þegar Herbal-Eisland (2009) skipti um starf sem unglingskennari yfir í háskólakennara sá hún kennsluna frá öðru sjónarhorni. Hún sá að stærðfræðikennsla var nánast eins alls staðar, einhæf og formföst. Hún sá einnig að samræður milli kennara og nemenda um stærðfræði snérist iðulega um kunnáttu nemenda en ekki hugsun þeirra.

Kennari sem er fastur innan þægindaramma hefðbundinna kennsluaðferða er ekki endilega slæmur kennari. Það er mikið verk að breyta eigin kennsluháttum, það að þora að taka skrefið og breyta er einungis upphafið að löngu ferðalagi þar sem kennari þarf að tileinka sér nýja venjur og finna út hvaða nálgun henti honum og hans markmiðum. Herbal-Eisland (2009) vildi leggja sitt af mörkum til að ná fram breytingum sem skiluðu sér beint í skólastofuna. Í kjölfarið setti hún saman hóp þar sem starfandi stærðfræðikennarar unnu saman á jafningjagrundvelli við að breyta eigin kennsluháttum í von um betri árangur í kennslu. Kennararnir styrktu fræðilega þekkingu sína, endurskoðuðu eigin kennsluhætti og deildu reynslu sinni með hópnum. Með þessu tókst kennurunum að bæta eigin kennslu þannig að nemendur urðu færari í stærðfræði. Gronewold og Dowling eru tveir þeirra stærðfræðikennara sem tóku þátt í verkefninu og hafa bæði náð miklum árangri við að breyta eigin kennsluháttum.

Gronewold (2009) var fljót að koma sér fyrir innan þægindarammans í stærðfræðikennslu þar sem hún nýtti hefðbundnar kennsluaðferðir. Foreldrar og nemendur lofuðu hennar starf sem fékk hana til að trúa því að hún væri að vinna vel. Þrátt fyrir öll lofin fannst henni kennslan ekki skila þeim árangri sem hún vildi sjá en átti erfitt með að átta sig á hvað það væri. Einn daginn varð hún fyrir innblæstri sem hvatti hana til að endurskoða eigin kennsluhætti. Hún sá upptöku af stærðfræðikennslu þar sem nemendur voru virkir þátttakendur í náminu og voru að tala sama um stærðfræði. Hana langaði að ná slíkri virkni

með sínum nemendum og fór að rýna í eigin kennslu. Eftir mikla sjálfskoðun og endurmenntun fór hún að taka eftir því hversu mikil áhrif kennari hefur á nám nemenda. Nemendur leggja áherslu á það sama og kennarinn og tileinka sér orðræðu hans. Hún sá að ómeðvitað væri hún að leggja áherslu á rétt svör og þar með kunnáttu nemenda en vildi leggja áherslu á skilning þeirra. Í kjölfarið ákvað hún að endurskoða samskipti sín og nemenda og fór að nýta tungumálið með markvissari hætti í kennslu. Hún fór að spyrja spurninga sem kröfðust hugsunar. Hún gerði meira úr þögninni til að hugsa, bæði eftir að hún spurði og eftir að nemendur svöruðu svo að nemendur hefðu tíma til að vega og meta umræðuefnið og koma eigin hugmyndum að. Eftir alla endurmenntunina er hennar helsta markmið nú í kennslu að nemendur skilji að stærðfræði snúist um að hugsa.

Dowling (2009) taldi sig hreinlega vera í röngu starfi þar sem honum fannst hann ekki ná viðeigandi árangri í kennslu. Hann kenndi eins og honum var kennt, hefðbundnar kennslu-aðferðir þar sem kennslubækur stjórnðu ferðinni. Samskipti milli hans og nemenda ein-kenndust af því að hann lagði inn afmarkað efni og þegar hann spurði nemendur spurninga var hann að leita að réttu svári, litlum tíma var varið í samræður. Líkt og Gronewold fór Dowling að endurskoða eigin kennsluhætti og sá að það fyrsta sem hann þyrfti að breyta væri eigið hugarfar til stærðfræðináms sem hann síðar yfirfærði til nemenda. Hann tileinkaði sér aðrar kennsluáferðir þar sem nemendur voru þátttakendur í náminu, áferðir sem hvetja til að hugsunar. Eitt af því fyrsta sem hann breytti var uppröðun húsgagna í skólastofunni með það að markmiði að auðveldara væri fyrir nemendur að tala saman. Vægi námsbókarinnar í kennslu minnkaði og hann fór að vera gagnrýnni í vali á verkefnum. Þegar hann fann hversu miklum árangri þessar breytingar skiluðu ákvað hann að fara nýta lausnaleyfaáferðir þar sem áherslan fór úr „hvernig“ yfir í „hvers vegna“. Hann notaði verðug verkefni sem kröfðust hærra stigs hugsunar frá nemendum sem skilaði sér bæði í hugsun og skilningi nemenda á stærðfræði.

Dowling (2009) og Gronewold (2009) áttu það sameiginlegt að þeim þótti áherslan í eigin kennslu ekki vera á réttum stað. Þau vildu flytja áhersluna á skilning nemenda í stað kunnáttu og til þess þurftu þau að endurskoða samskiptin í stofunni. Þau sáu bæði að með því að setja fókusinn á að skilja hugsun nemenda í umræðum jókst lærdómur þeirra og nemenda og það gaf þeim tækifæri á að leiðbeina nemendum áfram þannig að þeir hefðu skilning á því sem þeir væru að reikna.

4.2 Hugsandi skólastofa

Peter Liljedahl (2016) var einnig vitni að því að nemendur væru ekki að hugsa í stærðfræðitímum heldur leggja á minnið orð kennara. Þessi uppgötvun var upphafið af yfir 10 ára rann-

sóknarferli þar sem hann vildi finna aðgengilega leið fyrir kennara til að breyta kennslunni þannig að nemendur færu að hugsa. Hann komst að því að margir samverkandi hlutir gerðu það að verkum að nemendur væru ekki að hugsa í stærðfræði og að breyta þyrfti ríkjandi bekkjarmenningu (e. classroom norms) í hugsandi skólastofu (e. thinking classroom). Í hugsandi skólastofu eru nemendur ekki einungis hvattir til að hugsa heldur eru sköpuð tilefni til að hugsa. Hún er staður til að hugsa einn og með öðrum. Staður þar sem fólk hugsar saman til að efla þekkingu, skilning og hæfni. Í hugsandi skólastofu væntir kennari þess að nemendur hugsi. Til að auðvelda kennurum vinnuna að breytttri bekkjarmenningu vildi hann finna einföld verkfæri fyrir kennara til að skapa og viðhalda bekkjarmenningu hugsandi skólastofu.

Liljedahl (2016) fór á vettvang og fylgdist með stærðfræðikennslu og vöktu níu atriði athygli hans, það eru:

1. Tegund verkefna og hvernig þau eru notuð.
2. Hvernig kennari setur fyrir verkefni.
3. Hvernig kennari skiptir í hópa.
4. Vinnusvæði nemanda.
5. Skipulag skólastofunnar.
6. Hvernig kennari bregst við spurningum nemenda.
7. Hvernig kennari leiðbeinir nemendum.
8. Hvernig og hvenær kennari tekur saman niðurstöður nemenda.
9. Námsmat.

Hann komst að því að framkvæmd allra þessara atriða hefði áhrif á hvernig bekkjarmenning skapast í skólastofunni. Í hugsandi skólastofu þarf kennslan að hefjast á góðu þrautalausnarverkefni og til að byrja með þurfa þau að vera mjög spennandi hópverkefni sem hvetja nemendur til umræðu. Síðar þegar bekkjarmenningin einkennist af hugsandi skólastofu þurfa vandamálin að tengjast viðfangsefni kennslunnar og innihalda verðuga stærðfræði. Verkefnalýsingin þarf að vera gefin munnlega en ef verkefnin krefjast frekari upplýsinga mega þær fylgja með á pappír. Best er að skipta nemendum sýnilega af handahófi í hópa og láta þá vinna við lóðrétt yfirborð sem auðvelt er að stroka út af. Skipan skólastofunnar á að vera þannig að rýmið sem heild nýtist sem best, enginn einn veggur á að vera í aðalhlutverki og borðum á að raða af handahófi um stofuna. Kennari skal aðeins svara spurningum sem aðstoða nemendum við að halda áfram að hugsa. Best er að gefa leiðbeiningar þannig að jafnvægi náist milli áskorana verkefnisins og getu nemenda til að yfirstíga þær. Kennari getur

tekið saman niðurstöður úr verkefninu þegar allir hafa að minnsta kosti komist yfir fyrsta þröskuldinn. Þegar hann gerir það má hann ekki vera í hlutverki fræðara heldur er hann frekar í hlutverki umræðustjóra þar sem nemendur deila lærdómi sínum á milli. Námsmat felur í sér þátttöku nemenda í lærdómsferlinu og er metið í gegnum virka samræðu.

Hvert atriði skiptir máli en þó hafa þau mismikið vægi í að skapa og viðhalda hugsandi skólastofu. Sum eru nauðsynleg til að skapa bekkjarmenninguna á meðan önnur eru punkturinn yfir i-ið og enn önnur góð til að viðhalda stemmingunni. Hér hefur Liljedahl fundið aðferð til að skapa og viðhalda hugsandi skólastofu og útrýma bekkjarmenningu sem heftir hugsun. Aðferðinni fylgja auðveld verkfæri fyrir kennara til að nýta sér til að ná fram breytingum á eigin kennsluháttum.

4.3 Skipulag kennslustundar

Vendipunkturinn í árangursríkri kennslu er í umræðunni sem á sér stað. Smith og Stein (2015) hafa sett fram verklag fyrir kennara til að ná fram árangursríkum umræðum. Verkerlinu skipta þeir niður í fimm þætti: Forspá, eftirlit, val, röð og tenging. Áður en verkferlið hefst þurfa kennarar að setja sér markmið fyrir kennsluna. Þegar þeir hafa sett sér markmið þurfa þeir að velja verkefni sem þeir telja að skili tilsettum árangri. Þegar kennarar hafa valið verkefni hefst verkferli Smiths og Steins. Fyrsta verk kennara er að spá fyrir um hugsanlegar lausnir nemenda með því að leysa verkefnin á eins marga vegu og hægt er og mögulegum hindrunum. Þá þurfa kennarar að ákveða hvernig þeir ætla að bregðast við villum eða misskilningi nemenda án þess að minnka frumkvæði nemenda. Öll þessi vinna gerist fyrir kennsluna sjálfa en næstu skref gerast í kennslunni. Kennarar leggja verkefni fyrir nemendur og fylgist með framvindu þeirra. Þeir fylgjast með hvernig nemendur leysa verkefnið og skrá hjá sér lausnarleiðir. Lendi nemandi í vanda aðstoðar kennari hann án þess að gefa of mikið af upplýsingum. Þegar flestir hafa komist að einhverri niðurstöðu er næsta skref að ræða verkefnið og lausnarleiðir. Þá þarf kennari að ákveða í hvaða röð nemendur eiga að kynna niðurstöður sínar. Hann þarf að raða kynningum þannig að umræðan verði heildræn og að allt sem skipti máli til að ná markmiðum kennslunnar komi fram. Eftir að nemendur hafa kynnt niðurstöður sínar tengir kennari að lokum allt saman og þar með hvert markmið kennslustundarinnar var.

4.4 Val á verkefnum

Gott verkefni er eitt besta hjálpartæki kennara við að ná settum markmiðum. Í stærðfræðikennslu eru nemendur sífellt að leysa allskyns verkefni. Boaler (2016) áréttar áhrif verkefna á

nám nemenda. Hún segir uppsetningu þeirra til að mynda hafa áhrif á ánægju, innblástur, áhuga og virkni nemenda. Til að ná bættum árangri í kennslu getur því skipt sköpum að nota verkefni sem reyna á alla færniþætti stærðfræðinnar. Til að auðvelda kennurum að meta gæði verkefna listaði Boaler (2016) upp sex atriði sem hún telur einkenna verðug verkefni. Þau eru:

1. Gefa frelsi til að taka ákvarðanir t.d. hafa fleiri en eitt rétt svar og/eða gefa færi á ólíkum framsetningum og lausnarleiðum.
2. Spyrja spurninga áður en kennd er aðferð til að svara henni.
3. Hafa lágan þröskuld en hátt þak. Allir eiga að geta gert eitthvað, tæknileg orð eiga ekki standa í vegi fyrir því en á sama tíma eru þau líka krefjandi fyrir alla.
4. Kalla fram útskýringar og rökstuðning.
5. Tengja milli ólíkra hugtaka og framsetninga, fjalla ekki um staka þætti.
6. Gefa færi á myndrænni framsetningu.

Hafi verkefni öll þessi einkenni getur kennari verið nokkuð viss um að það sé gott verkefni. Listinn er þó ekki tæmandi og alls ekki þörf á að útiloka verkefni hafi það ekki öll einkennin sex. Einnig er mikilvægt að kennarar séu færir um að breyta verkefnum þannig þau falli betur að þeirra markmiðum og verði verðugri. Boaler segir frá þó nokkrum tilvikum um hvernig megi bæta verkefni, til að mynda sé hægt að opna einföld verkefni eins og „hvert er flatarmál rétthyrnings með hliðarlengdirnar 4 og 6,“ með því að spyrja „hvernig gæti rétthyrningur með flatarmálið 24 litið út?“ Sömuleiðis getur verið gott að lækka þröskuldinn með því að biðja nemendur að sjá verkefnið fyrir sér í huganum áður en þeir hefjast handa við að reikna. Þannig megi gera flest verkefni verðugri ásamt því að halda í innihald þeirra og tilgang.

4.5 Samantekt

Til eru mikið af verkfærum sem kennarar geta tileinkað sér til að ná fram betri árangri í kennslu. Fyrir það fyrsta þurfa kennarar að geta lagt mat á eigin starfshætti og ákveða hvaða breytingu þeir vilja fá fram (Herbal-Eisland, 2009). Síðan er gott að styrkja fræðilega þekkingu sína bæði með því að lesa rannsóknir sem og að leita ráða hjá öðrum. Næst verða kennarar að innleiða breytingar og meta árangur þeirra en með reynslunni finna þeir hvað hentar þeim og þeirra markmiðum. Liljedahl (2016) hefur tekið saman lista af atriðum sem hvetja nemendur til að hugsa um stærðfræði. Smith og Stein (2015) hafa sett saman verkferli sem skapar ramma fyrir kennara til ná fram árangursríkum umræðum um stærðfræði. Boaler (2016) hefur skilgreint einkenni verðugra verkefna sem gefa nemendum tækifæri til að kljást

við hærra stigs stærðfræði. Öll þessi verkfæri eru kennurum aðgengileg og auðvelt að tileinka sér þau og nýta þau til að komast út úr þægindaramma hefðbundinna kennsluaðferða.

5 Niðurstöður og umræður

Í upphafi var spurt hvaða áhrif samskipti hefðu á námsárangur nemenda í stærðfræði. Ég hef komist að þeirri niðurstöðu að samskipti eru gríðarlega stór og órjúfanlegur hluti af kennslu. Öll samskipti sem fara fram í skólastofunni hafa áhrif á nemendur og vinnu þeirra. Fyrir það fyrsta er þekkingu miðlað til nemenda með samskiptum og sömuleiðis fær kennari upplýsingar um hugmyndir og þekkingu nemenda í gegnum samskipti, hvort sem það er með tali, táknum eða riti (Friðrik Jónsson og Jakob Smári, 2004). Það gefur því auga leið að samskipti hafa áhrif á nám og námsárangur nemenda og er kennarinn mikil áhrifavaldur þar um. Hann velur hvaða námsefni á að kenna, ákveður hvaða kennsluaðferðir hann notar og hans framkoma hefur áhrif á framkomu nemenda. Samskipti hafa einnig áhrif á líðan nemenda sem endurspeglast í námi en þegar nemendum líður vel gengur þeim betur að læra (Latham, 1997). Samskipti eru alls konar bæði í hversdaglegu samhengi sem og í skólastofunni og er form þeirra aðstæðubundið. Ólík samskiptaform hafa ólíkan tilgang og þurfa kennarar að vera meðvitaðir um hvernig samskipti þeir eiga við nemendur. Stundum er best að kennari miðli þekkingu til nemenda en á öðrum tímum getur verið betra að nemendur miðli hugmyndum sínum til kennara. Óháð því hvaða samskiptaform kennari notar þá er gríðarlega mikilvægt að hann eigi í jákvæðum samskiptum við nemendur og skapi þeim uppbyggjandi námsumhverfi (Latham, 1997).

Eftirsóknarverður námsárangur í stærðfræði felur í sér meira en einungis að standa sig vel á prófi. Tilgangur náms í grunnskóla er að nemendur efli hæfni sína til þátttöku í lýðræðis-samfélagi og á nám í stærðfræði að nýtast til framtíðar (Aðalnámskrá grunnskóla, 2013). Til að ná slíku marki þurfa nemendur að tileinka sér stærðfræðilega orðræðu (Morgan, 2017). Þeir þurfa að geta tjáð sig og metið upplýsingar á formi stærðfræðinnar. Ein vænlegasta leiðin til að þjálfa slíka færni er með samskiptum. Þá er kennarinn ein helsta fyrirmynd nemenda þar sem orðræða hans hefur áhrif á orðræðu nemenda og sömuleiðis hafa nemendur áhrif hver á annan (Herbel-Eisenmann, 2009).

Kennsluhættir í stærðfræði hafa tekið hægfara breytingum í gegnum tíðina og virðast gamlar hefðir enn vera ríkjandi þrátt fyrir að rannsóknir sýni að þær skili ekki viðunandi árangri (Kilpatrick og Swafford, 2002). Enn þann dag í dag er lögð áhersla á að nemendur læri utanbókar reglur og aðferðir sem eru iðulega á kostnað skilnings og hugsunar. Þessar hefðir leiða til þess að nemendur verða eins og reiknivélar sem geta reiknað helling án þess að geta fært rök fyrir því sem þeir eru að gera. Eins og margoft hefur komið fram byggir færni í stærðfræði á fleiri þáttum en að kunna að reikna, það er skilningur, beiting, röksemdafærsla og þátttaka. Í menntastefnu Íslands sem sett er fram með lögum og námskrám er kennurum skylt mæti þörfum allra í skóla án aðgreiningar (Stjórnarráð Íslands, e.d.). Til að mæta fjölbreyttum hópi nemenda þarf kennari að nálgast efnið með fjölbreyttum hætti. Kennari

getur ekki leyft sér að áætla hæfni nemenda út frá einu sjónarmiði heldur verður hann að afla sér frekari upplýsinga um stöðu þeirra og skilning. Stærðfræðikennarar þurfa að færa sig úr kennaramiðaðri nálgun yfir í nemendamiðaða nálgun þar sem nemendur eru virkir þátttakendur í eigin námi.

Í rannsókn Boaler (1997) afsakar kennari notkun sína á einhæfri og hefðbundinni kennslu með því að segja að börn úr verkalýðsstétt hafi ekki bakland eða getu til að læra stærðfræði með öðrum hætti. Þessi hugsun hræðir mig og fær mig til að velta því fyrir mér hvort slíkir fordómar líðist einnig hér á landi, það er getur verið að á Íslandinu góða sé kennslan í Fellaskóla í Breiðholti öðruvísi hátt að en í Sjálandsskóla í Garðabæ vegna atgervis eða aðstæðna nemenda? Ég vona að svo sé ekki og að þessi gamla hugsun sem fyrir löngu er búð að afsanna með rannsóknum fari deyjandi út í heiminum.

Erfitt er að fullyrða um hvernig kennsluhættir tíðkast í íslenskum grunnskólum akkúrat núna en ljóst er að breytingar hafa verið erfiðar og hægfara. Ég tel það vera vegna skorts á reynslu. Kennarar byggja kennsluna á eigin reynslu og kenna oft eins og þeim var kennt. Þeir hræðast breytingar vegna skorts á reynslu af óhefðbundum kennsluaðferðum. Það er til fjöldinn allur af aðgengilegum verkfærum sem kennarar geta tileinkað sér til að bæta eigin kennslu. Verkfærum sem hjálpa kennurum að brjótast út úr þægindarammanum og prufa nýjar aðferðir í stærðfræðikennslu. Ég tel að til að ná fram breytingum inn í skólastofuna þurfi að gera meira en að að breyta lögum og reglum. Gefa þarf kennurum tækifæri á að öðlast reynslu af nýjum aðferðum og hvernig kenna megi nemendum án þess að mata þá af upplýsingum. Kennarar þurfa líka að efla fræðilegan bakgrunn sinn. Þeir þurfa að vera á tánum með nýjustu rannsóknir og nýta upplýsingarnar til að bæta eigin kennslu en ekki sitja fastur á sínu vegna þess að það „virkar“. Ég tel að endurmenntun líkt og Herbel-Eisenmann (2009) setti saman gæti verið góð leið til að breytingarnar skili sér beint í skólastofuna. Þar koma saman kennarar og miðla eigin reynslu, læra hver af öðrum, styrkja fræðilega þekkingu sína og prófa sig áfram þar til þeir ná tilsettu marki. Eitt af því helsta sem kennarar þurfa að endurskoða í eigin kennslu eru samskiptin við nemendur.

6 Lokaorð

Samfélagið er í stöðugri þróun og mikill þrýstingur er á skólasamfélagið að innleiða nýjungar hvort sem það er námsefni, tækni eða kennsluaðferðir. Mikið af nýjungum hafa verið innleiddar í skólana undanfarin ár en þróun í skólum uppfyllir samt sem áður ekki allar væntingar samfélagsins. Kennsluhættir í stærðfræði hafa tekið einstaklega hægfara breytingum og stundum má jafnvel tala um afturför. Ég sem verðandi stærðfræðikennari velti því fyrir mér hvernig standi á því. Það er eins og kennarar hunsi breytta hugsun þrátt fyrir ný matsviðmið, námsefni og tækni. Breytingar skila sér ekki í skólastofuna og þar með ekki í nám nemenda. Ég tel það vera vegna skorts á reynslu á óhefðbundnum kennsluaðferðum.

Ég líkt og margir aðrir nýliðar í kennslu óttast það að mistakast. Ég óttast það að ná ekki markmiðum mínum og falla í það far að mata nemendur mína af aðferðum og reglum sem þeir festa á minnið með endurtekningu. Ég óttast það að nemendur mínir verði hugsunarlausar reiknivélar og að námið nýtist þeim lítið í framtíðinni. Það er því einlægt markmið mitt að nýta þá þekkingu sem ég hef öðlast með skrifum þessa verkefnis í kennslu og vanda samskipti mín við nemendur. Ég ætla að nýta þau verkfæri sem hér hafa verið kynnt til og vera gagnrýnin við mat á framgangi eigin kennslu. Ég vil sjá breytta hugsun í stærðfræðikennslu þar sem nemendur eru virkir þátttakendur í eigin námi og hafi áhuga og vilja á að læra stærðfræði.

Heimildaskrá

- Aðalnámskrá grunnskóla: Almennur hluti 2011: Greinasvið 2013 /2013.
- Anna Kristín Sigurðardóttir, Dóra S. Bjarnason, Kristín Erla Harðardóttir, Lára Rún Sigurvinsdóttir, Sigrún Sif Jóelsdóttir og Steingerður Ólafsdóttir. (2014). *Skóli án aðgreiningar: Samantekt á lögum og fræðilegu efni*. Sótt af: https://www.stjornarradid.is/media/menntamalaraduneyti-media/media/ritogskyrslur/skyrsl_skoli_adgr_samant_l%C3%B6g_fr_2015.pdf
- Boaler, J. (1997). *Experiencing School Mathematics: Teaching styles, sex and setting*. Buckingham: Open University Press.
- Boaler, J. (2016). *Mathematical mindsets: unleashing students' potential through creative math, inspiring messages, and innovative teaching*. San Francisco, CA: Jossey-Bass & Pfeiffer Imprints.
- Cherry, K. (2019, 9. maí). The Role of a Schema in Psychology. Sótt af <https://www.verywellmind.com/what-is-a-schema-2795873>.
- Dowling, D. (2009). Reading (Articles), Writing (Reflections), and A-Risk-Metic: Working to improve My Practice. Í B. Herbal-Eisenmann og M. Cirillo (ritstjórar), *Promoting Purposeful Discourse: Teacher Research in Mathematics Classrooms* (bls. 57-70). Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.
- Friðrik Jónsson og Jakob Smári. (2004). Samskipti, viðhorf, fordómar. Sótt af <http://www.persona.is/index.php?action=articles&method=display&aid=26&pid=26>.
- Gleðjast yfir niðurstöðu samræmdra prófa. (2016, 15. desember). *Víkurfrettir*, bls. 2.
- Gronewold P. (2009). "Math Is about Thinking": From Increased Participation to Conceptual Talk. Í B. Herbal-Eisenmann og M. Cirillo (ritstjórar), *Promoting Purposeful Discourse: Teacher Research in Mathematics Classrooms* (bls. 57-70). Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.
- Herbel-Eisenmann, B. (2009). Introduction to the Project, the People, and the Reflective Activities. Í B. Herbal-Eisenmann og M. Cirillo (ritstjórar), *Promoting Purposeful Discourse: Teacher Research in Mathematics Classrooms* (bls. 3-28). Virginia: National Council of Teachers of Mathematics.
- Ingvar Sigurgeirsson. (2000). *Að mörgu er að hyggja: Handbók um undirbúning kennslu*. (3. útgáfa, 2. prentun). Reykjavík: Æskan ehf.
- Íslensk orðabók. (e.d.). Sótt af <https://snara.is/>.

- Johnston-Wilder, S. og Pimm, D. (2017). Learning mathematics through digital technology. Í Johnston Wilder S., Lee C. og Pimm D. (ritstjórar), *Learning to Teach Mathematics in Secondary School: A companion to school experience* (4. Útgáfa, bls. 148-163). New York: Routledge.
- Kilpatrick J. og Swafford, J. (ritstjórar). (2002). *Helping Children Learn Mathematics*. Sótt af <https://www.nap.edu/read/10434/chapter/4#16>.
- Latham, G. (1997) *Behind the Schoolhouse Door: Eight Skills Every Teacher Should Have*. Sótt af <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED408735.pdf>.
- Lave, J. (1988). *Cognition in Practice*. Sótt af <https://www.slideshare.net/jennyacevedo2012/jean-lave-cognitioninpracticemindmathematibookfiorg>.
- Lilja Alfreðsdóttir. (2018, 12. júní). Menntastefna Íslands til ársins 2030. Sótt af <https://www.visir.is/g/2018180619755>.
- Liljedahl, P. (2016). Building Thinking Classrooms: Conditions for Problem Solving. Í Felmer, P., Pehkonen E. og Kilpatrick J. (ritstjórar), *Problem-Posing and Questioning: Two Tools to Help Solve Problems*. (bls. 361-386). DOI: 10.1007/978-3-319-28023-3_21.
- Margrét Héðinsdóttir, Fanný Gunnarsdóttir og Erla Kristjánsdóttir. (2013). Heilbrigði og velferð: Grunnþáttur í menntun á öllum skólastigum. Í Aldís Yngvadóttir og Sýlvía Guðmundsdóttir (ritstjórar), *Ritröð um grunnþætti menntunar*. Sótt af <https://mms.is/namsefni/heilbrigdi-og-velferd-rit-um-grunnthaetti-menntunar-rafbok>.
- Mason J. og Johnston-Wilder S. (2006). *Designing and Using Mathematical Tasks*. St Albans: Tarquin Publications.
- Meyvant Þórólfsson. (2003). Stærðfræðilegt læsi og meginþræðir. *Glæður 13* (1-2), 31-37.
- Morgan, C. (2017). Communicating mathematically. Í Johnston-Wilder S., Lee C. og Pimm D. (ritstjórar), *Learning to Teach Mathematics in Secondary School: A companion to school experience* (4. Útgáfa, bls. 148-163). New York: Routledge.
- Skemp, R. (1976). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *Mathematics Teaching*, 77(desember), 20-26. Sótt af <https://www.nlcsmaths.com/uploads/2/6/3/6/26365454/skemp.pdf>.
- Smith, M. og Stein, M. (2015). *5 Practices for orchestrating Productive Mathematics* Discussions 5. prentun. Bandaríkin: National Council of Teacher of Mathematics.

- Stefán Jökulsson (2013). Læsi: Grunnþáttur í menntun á öllum skólastigum. Í Aldís Yngvadóttir og Sýlvía Guðmundsdóttir (ritstjórar), *Ritröð um grunnþætti menntunar*. Sótt af <https://mms.is/namsefni/laesi-rit-um-grunnthaetti-menntunar-rafbok>.
- Stjórnarráð Íslands. (e.d.). Menntamál: Grunnskólar. Sótt af <https://www.stjornarradid.is/verkefni/menntamal/grunnskolar/>.
- Stofnun Árna Magnússonar í íslenskum fræðum. (e.d.) Íslensk nútímamálsorðabók. sótt af <http://islenskordabok.arnastofnun.is/islob>.
- Ward-Penny, R. (2017). Why do we teach mathematics? Í Johnston-Wilder S., Lee C. og Pimm D. (ritstjórar), *Learning to Teach Mathematics in Secondary School: A companion to school experience* (4. Útgáfa, bls. 148-163). New York: Routledge.