Þróun verkefna um diffrun með áherslu á skilning og uppgötvun

Sóley Benediktsdóttir

Raunvísindadeild
Háskóli Íslands
2021

ÞRÓUN VERKEFNA UM DIFFRUN MEÐ ÁHERSLU Á SKILNING OG UPPGÖTVUN

Sóley Benediktsdóttir

40 ECTS ritgerð sem hluti af
Magister Scientiarum gráðu í Menntun framhaldsskólakennara

Leiðbeinendur
Benedikt Steinar Magnússon
Bjarnheiður Kristinsdóttir

Prófdómari
Kristín Bjarnadóttir

Raunvísindadeild
Verkfræði- og náttúruvísindasvið
Háskóli Íslands
Reykjavík, ágúst 2021

Þróun verkefna um diffrun með áherslu á skilning og uppgötvun
40 ECTS ritgerð sem hluti af M.S. gráðu í Menntun framhaldsskólakennara

Raunvísindadeild
Verkfræði- og náttúruvísindasvið
Háskóli Íslands
Dunhagi 5
107 Reykjavík
Ísland

Sími: 525 4000

Bibliographic information:
Sóley Benediktsdóttir, 2021, Þróun verkefna um diffrun með áherslu á skilning og uppgötvun, M.S. thesis, Raunvísindadeild, Háskóli Íslands.

Prentun: Háskólaprent, Fálkagata 2, 107 Reykjavík
Ísland, ágúst 2021

Ágrip

Stærðfræðinám í framhaldsskólum reynist mörgum nemendum erfitt. Sumir nemendur gefast upp eða byrja að halda því fram að þeir geti ekki reiknað stærðfræði. Fyrir kennara er mikilvægt að sporna við slíku hugarfari. Rannsóknir sýna að ein besta leiðin til að hjálpa nemendum að finnast þeir hafa tök á stærðfræði sé að leyfa þeim að mynda eigin tengingar milli ólíkra efnisþátta stærðfræðinnar og að uppgötva sjálfir stærðfræðilegar hugmyndir. Markmið þessa verkefnis var að búa til og þróa verkefni fyrir nemendur í framhaldsskóla með þetta í huga. Ákveðið var að verkefnin skyldu snúast um diffrun bæði vegna áhuga höfundar á því efni og að rannsóknir hafa sýnt að íslenskir framhaldsskólanemendur eiga í mestum erfiðleikum með diffrun og tegrun að loknum framhaldsskóla.

Þrjú verkefni voru samin sem krefjast þess að nemendur velti stærðfræðilegum hugmyndum fyrir sér og myndi sér sinn eigin skilning á efninu. Fyrsta verkefnið felur í sér myndræna túlkun á diffrun með hallatölu snertils. Annað verkefnið fjallar um diffrun veldisfalla. Þriðja verkefnið er bestunarverkefni þar sem nemendur eiga bæði myndrænt og með útreikningum að finna stærsta rúmmál gjafaöskju.

Fyrsta verkefnið var lagt fyrir nemendur í framhaldsskóla. Úrtakið voru 16 nemendur í stærðfræðiáfanga á þriðja þrepi. Niðurstöður voru nýttar í að uppfæra verkefnin. Helstu niðurstöður voru að verkefnið var hæfilega krefjandi fyrir hópinn og áhugi var fyrir hendi meðal nemenda að fá að vita meira um diffrun eftir að verkefninu var lokið. Ásamt því kom í ljós að nemendur höfðu ekki náð almennilegum tökum á því að skrifa stærðfræðilegan texta og að nemendur treystu ekki eigin röksemdarfærslu nægilega vel til að vera öruggir með svör sín.

Auk þess að uppfæra fyrsta verkefnið út frá niðurstöðum prófunarinnar þá var einnig þróaður matskvarði sem gagnast getur kennurum við leiðsagnarmat. Sömuleiðis var bætt við úrvinnsluverkefnum og gerð ítarleg verkefnalýsing og kennsluleiðbeiningar fyrir kennara með tengingum í áhersluatriði aðalnámskrár. Síðast en ekki síst voru verkefnin skoðuð út frá sjónarhorni Teaching for Robust Understanding (TRU) rammans, en þeim ramma er ætlað að gagnast kennurum til að skapa aðstæður til að nemendur geti lært til skilnings. Í viðauka við ritgerðina má finna verkefnin þrjú, úrvinnsluverkefni, kennsluleiðbeiningar, verkefnalýsingar og matskvarðann.

Abstract

Mathematics in upper secondary schools is a challenging subject for many students, and many even become convinced they are unable to learn the subject. In order to counter such beliefs, it is important that teachers refuse to accept that sort of thinking. There are ways to help students overcome their pessimism and, according to research, one of the best ways to help them is to guide them towards discovering their own connections between different elements of mathematics and using these connections to better their understanding. The objective with this thesis is, therefore, to create and develop projects for students in upper secondary schools with this idea in mind. The projects focus on differentiation because the author is interested in that field and because studies conducted among upper secondary school graduates have shown they struggle most with differentiation and integration of all the mathematical fields.

Three projects are presented here in which students have to deliberate the mathematical ideas which are being focused on, and as a result, contrive their own understanding of these ideas. The first project inspires a graphical interpretation of differentiation with the use of the slope of a tangent. The second project centres on the derivative of power functions and discovering a graphical pattern to find the derivative. The third project is on optimization, where the students are supposed to find the largest volume of a gift box, both graphically and through calculations.

Sixteen upper secondary school students worked in groups on the first project. Their answers and ideas were used to improve all three projects. The conclusions showed that the project was of reasonable difficulty for the groups and there was an interest in knowing more about differentiation after having completed the project. Other conclusions are that the students have yet to adequately master the use of mathematical language and reasoning, and they need to have more faith in their own reasoning, enough to be confident with their answers.

In addition to updating the projects in accordance with the study, an assessment rubric was developed, which can be of use for teachers for formative assessment. Additionally, summarization projects derived from the main projects were added as well as a detailed project description and teaching guidelines with connections to the main components of the Icelandic curriculum for upper secondary schools. Lastly, the projects were analysed from the perspective of the Teaching for Robust Understanding (TRU) framework. That framework is supposed to aid teachers in creating an environment where students can learn with a focus on understanding. In the appendices of this thesis, the three projects can be found as well as the summarisation projects, the teaching guidelines, the project descriptions, and the assessment rubric.

Formáli

Þessi ritgerð er meistaraprófsritgerð til M.S.-gráðu í menntun framhaldsskólakennara við Háskóla Íslands. Vægi ritgerðarinnar er 40 ETC einingar. Ritgerðin fjallar um verkefni fyrir framhaldsskólanema í diffrun sem eru vitsmunalega krefjandi og eiga að hjálpa nemendum að byggja upp eigin skilning á námsefninu. Verkefnin voru prófuð á nemendum í framhaldsskóla og voru niðurstöður þeirra nýttar til að breyta og bæta verkefnin. Verkefnin eru þrjú og þeim fylgja úrvinnsluverkefni, kennsluleiðbeiningar, verkefnalýsingar og matskvarði. Verkefnin eru hugsuð fyrir nemendur sem eru að byrja að læra diffrun í framhaldsskóla. Hægt er að finna verkefnin í viðauka og nýta sér þau í kennslu.

Undirbúningur fyrir verkefnið hófst sumarið 2020. Leiðbeinendurnir mínir voru Benedikt Steinar Magnússon, dósent í stærðfræði við Raunvísindadeild Verkfræði- og náttúruvísindasviðs, og Bjarnheiður Kristinsdóttir, aðjunkt í stærðfræðimenntun við Menntavísindasvið. Ég vil þakka þeim fyrir alla þeirra aðstoð og leiðsögn. Ég vil einnig þakka öllum öðrum sem hafa stutt við mig í gegnum þetta ferli.

Þessi meistaraprófsritgerð er samin af undirritaðri. Ég hef kynnt mér vísindasiðareglur Háskóla Íslands og vísa til alls þess efnis sem ég hef sótt til annarra. Þetta staðfesti ég með undirskriftinni minni.

Reykjavík, 21. júlí 2021

Sóley Benediktsdóttir

Efnisyfirlit

Myndaskrá

Töfluskrá

1. Inngangur

Flestir tengja stærðfræði við þann hluta af stærðfræði sem kallast oft reikningur. Aftur á móti líta flestir stærðfræðingar á reikning sem aðeins eitt af þeim tækjum sem þeir nota í stærðfræði. Í stærðfræði felst margt annað, þar á meðal að leysa verkefni og þrautir, greina og skilja mynstur og rökfræði (National Research Council, 2000, bls. 164). Margir kannast við það úr stærðfræðitímum að fá stærðfræðiformúlu í hendurnar með það fyrir augum að nota hana til að leysa gefið dæmi. Svarið við dæminu fæst, en lærir maður eitthvað af því? Hversu góðan skilning hefur nemandi á diffrun sem kann að reikna afleiðu falls með gefnum jöfnum á jöfnublaði en veit ekki hvað afleiða fallsins gefur honum eða hvernig jöfnurnar á jöfnublaðinu fást? Getur nemandinn séð diffrun sem eitthvað annað en dæmi á blaði sem kennarinn segir honum að reikna? Er nemandinn líklegur til að finnast útreikningarnir gagnlegir?

Rannsókn Humenberger (2000) um hvaða undirgreinar í stærðfræði nemendum þótti mest og minnst gagnlegar sýndi að nemendur sáu minnsta notagildið í tegrun og þriðja minnsta í diffrun. Það er sorglegt að nemendur líti á þessi stærðfræðilegu hugtök sem gagnslaus. Hvað er það sem gerir hugtökin gagnslaus í augum nemenda? Af hverju er það gagnslaust að læra að diffra, með þeim rökum að fæstir diffra í daglegu lífi, en það er ekki gagnslaust að læra að kryfja naggrís eða halda bolta á lofti í fótbolta? Þegar fólk æfir fótbolta er það látið æfa sig í að halda á lofti til að hafa stjórn á boltanum. Atvinnumenn í fótbolta halda ekki bolta á lofti í miðjum leik heldur er það hluti af æfingum sem fara fram bak við tjöldin. Á sama hátt er hægt að líta á marga efnisþætti í stærðfræði. Margir þættir námsefnisins eru lítið eða ekkert notaðir í daglegu lífi en eru hluti af æfingunni sem þörf er á til að ná skilningi og leikni. Þó einstaklingur sé ekki að fara að nota allt efnið sem hann lærði í framhaldsskólastærðfræði er það hæfnin í að fylgja röksemdarfærslu og að geta leitt út skref fyrir skref eigin hugmyndir og fært rök fyrir þeim, sem á að fylgja honum út ævina.

1.1. Bakgrunnur

Höfundur verkefnisins hefur unnið í framhaldsskóla í fimm ár. Síðastliðin tvö ár hefur höfundur einnig verið í náminu menntun framhaldsskólakennara í stærðfræði.

Bæði í tímum sem kennari, sem áhorfandi í tímum og sem framhaldsskólanemi á sínum tíma hefur höfundur oft heyrt spurningar á borð við „Hvaða jöfnu á að nota hér?“og „Hvaða aðferð á ég að nota í þessu dæmi?“. Oft koma spurningarnar áður en nemandinn sem spurði hefur gefið sér tíma í að skoða dæmið. Þessir nemendur eru vanir því að til sé ákveðin regla sem megi beita til að leysa dæmið svo hægt sé að fara í næsta dæmi og leysa það með sömu eða svipaðri reglu. Það er bara handavinna, æfing í því að skrifa hratt og klára þannig verkefnin sem fyrst. Ef kennarinn gefur þeim svarið, þá verða nemendurnir háðari kennaranum í dæmareikningi og það letur þá til að hugsa sjálfstætt (Good o.fl., 1987; Liljedahl, 2020). Samkvæmt Boaler (2015, bls. 34) er eitt af því sem einkennir nemendur sem skara fram úr í stærðfræði það að þeir nálgast stærðfræði með því hugarfari að þá langar að skilja hana. Það krefst vinnu að fá nemendur úr því hugarfari að þeir muni aldrei geta reiknað eða skilið stærðfræði yfir í það að langa að skilja. Nemendur þurfa einnig sjálfir að vera tilbúnir að breyta hugsunarhætti sínum (Liljedahl, 2005). Þegar höfundur verkefnisins hefur lagt fyrir verkefni sem byggja á skilningi og tengslum milli ólíkra efnisþátta í stærðfræðitímum hafa nemendur haft orð á því hvað það hefur verið áhugavert. Því hefur myndast löngun hjá höfundi að leggja meiri áherslu á verkefni þar sem nemendur fá að velta stærðfræði fyrir sér og reyna að mynda eigin tengingar milli efnisþátta og móta skilning.

Höfundur þessa verkefnis hefur einnig á sínum kennsluferli heyrt framhaldsskólanema segja setningar á borð við „Ég kann ekkert í stærðfræði“, „Ég mun aldrei geta þetta“ og „Þetta er svo tilgangslaust, ég mun aldrei nota þetta“. Sá hugsunarháttur er ekki uppbyggilegur og er ekki að fara að hjálpa nemendum að bæta sig. Það að finnast efnið tilgangslaust vekur upp spurningar um hvers vegna maður þurfi að læra hitt og þetta. Það er eðlilegt að nemendur séu forvitnir um notagildi þess sem þeir eru að læra en stundum er erfitt að sjá notagildi fyrr en eftir að hafa náð tökum á efninu.

Nemendur læra margföldunartöfluna snemma í grunnskóla en átta sig ekki endilega strax á notagildi margföldunar. Fengju þeir 8 stafla af bókum með 6 bækur í hverjum stafla myndu einhverjir telja sérhverja bók til að komast að því að bækurnar séu 48 frekar en að telja staflana og bækur í hverjum stafla og margfalda tölurnar saman. Það sama á við um fleiri stærðfræðileg hugtök. Nemendur sjá ekki alltaf notagildið í því sem þeir eru að læra. Þeir geta reiknað dæmi í stærðfræðibókinni en kunna ekki að yfirfæra það yfir í raunheiminn. Stærðfræðingurinn Meni Rosenfeld náði vel utan um þetta þegar hann sagði að maður muni aldrei rekast á dæmi í daglegu lífi með miða á sem segir manni að nota örsmæðarreikning hér (Rosenfeld, 2015). Diffrun og aðrir þættir örsmæðarreiknings eru notaðir í hinum ýmsu vísindagreinum, meðal annars eðlisfræði, lyfjafræði, stjörnufræði, hagfræði, stærðfræði og fleirum, þó það séu ekki allir sem átta sig á því. Algengt er að fyrsta diffrunardæmi sem tengist raunheiminum sem nemendur fá sé að reikna út hraða bíls á ákveðnum tíma og síðan hröðun hans á þeim tíma. Diffrun er mikið notuð í eðlisfræði en er einnig notuð í flestum öðrum vísindagreinum eins og hagfræði, lyfjafræði, arkitektúr, landafræði, verkfræðigreinum og lengi mætti telja. Höfundur hefur síðustu ár viljað hjálpa nemendum að sjá notagildi í efnisþáttum stærðfræðinnar með verkefnum og dæmum úr raunheiminum.

1.2. Markmið

Kveikjan að verkefninu fékkst þegar höfundur verkefnisins hafði verið að semja verkefni sem byggðu á skilningi til að brjóta upp kennslustundir og til að hjálpa nemendum að skilja efnið. Sá tími sem fór í undirbúning á þessum verkefnum var mikill, það voru ekki nægilega margir tímar í sólarhringnum til að geta samið og undirbúið verkefnin fyrir kennslustundirnar. Mikil vinna felst í því að semja verkefni og því er ekki hægt að ætlast til þess að kennarar hafi tíma til að semja ný skilningsverkefni fyrir kennslustundir.

Markmið þessa meistaraverkefnis er að búa til verkefni í diffrun þar sem nemendur fá tækifæri til að leiða út niðurstöður, byggja upp myndrænan skilning og að sjá diffrun frá ólíkum sjónarhornum. Verkefnin voru því búin til með það í huga að kennarar gætu haft aðgang að verkefnum sem byggja á skilningi og nálgast námsefnið á annan hátt, án þess að þurfa að eyða sínum frítíma í að semja verkefni. Verkefnin koma ekki í staðinn fyrir þær kennslubækur eða hefti sem eru notuð í skólum. Þau eiga að leggja meiri áherslu á skilning og sjálfstæða hugsun en hefðbundin kennslubókardæmi og má gjarnan nota samhliða kennslubókum. Stefán Jökulsson (2012) við Menntavísindasvið Háskóla Íslands heldur því fram að nemendum ætti ekki einungis að vera kennt allt beint upp úr bókum heldur á að reyna að gera þá að lærlingum á sínum fagsviðum. Ýmsir fræðimenn, þar á meðal Rigelman (2007) og Schoenfeld (2016), halda því fram að kennarar eiga að reyna að gera nemendur að stærðfræðilegum hugsuðum og nota til þess verkefni við hæfi. Með þeirra sjónarhorn í huga voru verkefnin samin.

1.3. Uppbygging ritgerðarinnar

Ritgerð þessi skiptist í sex kafla ásamt formála, ágripi og viðauka. Ritgerðin hefst á inngangi þar sem sagt er frá bakgrunni verkefnisins, markmiðum og uppbyggingu ritgerðarinnar. Næst kemur fræðilegur rammi. Fræðilegi ramminn hefst á stuttu yfirliti yfir stöðu stærðfræðináms í íslenskum framhaldsskólum. Næst er farið yfir stærðfræðinám með áherslu á skilning og túlkun á því hvað skilningur er. Í þriðja hluta fræðilega rammans eru spurningar nemenda og kennara í kennslustofu skoðaðar og rýnt í það hvaða spurningar eru gagnlegar og hvernig hægt er bregðast við ólíkum spurningum nemenda. Farið er yfir skilgreiningar á diffrun í ólíkum kennslubókum og þær bornar saman, skoðað hvernig hægt er að hjálpa nemendum að mynda eigin skilning á diffrun og hvernig hægt sé að rýna dýpra í skilgreiningarnar. Loka undirkafli fræðilega rammans fjallar um rammann Teaching for Robust Understanding, eða TRU-rammann, eins og hann er kallaður.

Þriðji kafli fjallar um aðferðafræði rannsóknarinnar sem gerð var. Þar er rannsóknaraðferðum lýst, vali á þátttakendum, hvernig rannsóknin var lögð fyrir og hvernig gögnin voru greind. Einnig er þar fjallað um siðferðileg atriði og takmarkanir rannsóknarinnar. Í fjórða kafla er farið yfir niðurstöður rannsóknarinnar. Niðurstöðurnar eru túlkaðar og settar í fræðilegt samhengi í fimmta kafla. Í sjötta kafla eru lokaorð þar sem farið verður stuttlega yfir markmið og niðurstöður.

Í viðaukum má finna verkefnið, matskvarða og kennsluleiðbeiningar. Í fyrsta viðauka eru verkefnin sem ritgerðin byggist á og voru samin til að hjálpa nemendum að mynda skilning á diffrun. Þar eru þrjú verkefni ásamt úrvinnsluverkefnum. Í viðauka B er matskvarði fyrir verkefnin. Í viðauka C er lýsing á verkefnunum og kennsluleiðbeiningar.

2. Fræðilegur rammi

2.1. Staða stærðfræðináms í íslenskum framhaldsskólum

Á árunum 2015 til 2016 fór stytting náms í framhaldsskóla fram á Íslandi. Nokkrir skólar höfðu stytt nám sitt töluvert fyrr. Styttingin var úr fjögurra ára námi niður í þriggja ára nám. Mörgum nemendum og skólameisturum þótti styttingin felast í því að námsefni fjögurra ára væri þjappað niður í þrjú (Arnór Bjarki Svarfdal, 2020; Ingileif Oddsdóttir, 2020). Samkvæmt Aðalnámskrá framhaldsskóla (Mennta- og menningamálaráðuneytið, 2011) skal stúdentspróf vera að minnsta kosti 200 framhaldsskólaeiningar en fullt nám er 60 framhaldsskólaeiningar á ári. Því er ljóst að nemendur þurfa að vera í fleiri framhaldsskólaeiningum á ári en það sem samsvarar fullu námi til að geta útskrifast á þremur árum.

Samkvæmt Aðalnámskrá framhaldsskóla (Mennta- og menningamálaráðuneytið, 2011) þurfa nemendur að lágmarki að taka fimm framhaldsskólaeiningar í stærðfræði til að útskrifast með stúdentspróf. Flestir framhaldsskólar gera þó þá kröfu að nemendur af bóknámsbraut taki fleiri framhaldsskólaeiningar í stærðfræði (sjá viðauka D). Þeir skólar sem bjóða upp á náttúrufræðibrautir, náttúruvísindabrautir eða eðlisfræðibrautir gera kröfur um að nemendur taki frá 25 til 51 framhaldsskólaeiningum í stærðfræði til stúdentsprófs (sjá viðauka D). Til samanburðar þá mælir Háskóli Íslands með því að nemendur hafi lokið 40 framhaldsskólaeiningum í stærðfræði til að innritast í verkfræði (Háskóli Íslands, 2021) og Háskólinn í Reykjavík mælir með 30 framhaldsskólaeiningum í stærðfræði og þar af 15 á þriðja hæfniþrepi til að innritast í verkfræði (Háskólinn í Reykjavík, 2021). Engar deildir háskólanna mæla með fleiri framhaldsskólaeiningum í stærðfræði en verkfræðideild gerir. Flestir framhaldsskólar bjóða upp á valáfanga í stærðfræði sem nemendur geta tekið. Þannig geta nemendur, sem ætla í nám þar sem mælt er með að nemendur hafi tekið fleiri framhaldsskólaeiningar í stærðfræði en kröfur eru um í þeirra framhaldsskóla, bætt við sig framhaldsskólaeiningum í stærðfræði til að hafa tekið þær einingar sem háskólarnir mæla með.

Stærðfræðiáfangar í framhaldsskóla eru á öðru, þriðja og fjórða þrepi. Til að teljast hafa lokið fyrsta hæfniþrepi í stærðfræði þarf nemandi að hafa náð einkunninni

B eða hærra í stærðfræði í grunnskóla (Menntamálastofnun, 2016). Meiri hluti framhaldsskóla landsins bjóða upp á stærðfræðiáfanga á fyrsta þrepi fyrir nemendur sem náðu ekki einkunninni B eða hærra í grunnskóla. Einkunnin B táknar að nemandinn hafi náð hæfniviðmiðum tíunda bekkjar sem samsvarar fyrsta hæfniþrepi í stærðfræði (Mennta- og menningarmálaráðuneytið, 2013). Áfangar á fjórða þrepi eru komir yfir í efni sem kennt er í háskólum, en sumir framhaldsskólar bjóða upp á stærðfræðiáfanga áf fjórða þrepi (Mennta- og menningarmálaráðuneytið, 2013)

Þrátt fyrir að nemendur hafi lokið nægilega mörgum framhaldsskólaeiningum í stærðfræði eru margir ekki nægilega undirbúnir fyrir stærðfræðiáfanga í háskóla. Í skýrslu frá 2014 er nefnt að að minnsta kosti helmingur þeirra sem byrja í verkfræðinámi í Háskóla Íslands eða Háskólans í Reykjavík lendi í vandræðum með stærðfræði (Anna Helga Jónsdóttir o.fl., 2014). Í niðurstöðum sömu skýrslu er rætt um að í kennslu í framhaldsskólum sé mikil áhersla á einstök, efnisatriði og þjálfun í beitingu staðlaðra reikniaðferða. Sú áhersla veldur því að leikni og hæfni í tungumáli stærðfræðinnar, miðlun stærðfræðilegs efnis, stærðfræðilegri hugsun, lausnum þrauta og verkefna og röksemdafæsla verði út undan (Anna Helga Jónsdóttir o.fl., 2014). Þegar nemendur fara í háskóla er stærðfræðin í fyrsta áfanganum ekki framandleg því viðfangsefnin eru ný, heldur eru þar gerðar meiri kröfur um skilning á efninu (de Guzmán o.fl., 1998). Árið 2011 var gerð úttekt á könnunarprófi fyrir nemendur í inngangsnámskeiðum í stærðfræðigreiningu í Háskóla Íslands (Anna Helga Jónsdóttir o.fl., 2013). Alls tóku 427 nemendur prófið sem var lagt fyrir í annarri kennsluviku og nemendur vissu ekki af því fyrir fram. Alls voru 721 skráðir í námskeiðin. Prófið skiptist í talnareikning og föll, algebru, jöfnu beinnar línu, hornaföll, diffrun og tegrun, vigra og tvinntölur. Meðaleinkunn nemenda á könnunarprófinu var 4,5 og miðgildið var 4,4. Þar af áttu nemendur í mestum erfiðleikum með diffrun og tegrun, þar var meðaleinkunnin 1,8. Aðeins 37% nemenda sem voru skráðir í inngangsnámskeiðin í stærðfræðigreiningu það sama ár luku námskeiðunum. Það var svipað og árin á undan (Anna Helga Jónsdóttir o.fl., 2013). Ljóst er að skilningur nemenda í diffrun og tegrun er í flestum tilfellum ekki nægilegur eftir framhaldsskóla fyrir áframhaldandi nám sem inniheldur stærðfræðiáfanga.

2.2. Áhersla á skilning

Rannsóknir í kennslufræði benda til þess að það að kenna nemendum að stinga tölum inn í formúlur sé ekki besta leiðin til að kenna stærðfræði heldur er betra að hvetja nemendur til að hugsa og læra sjálfstætt (Swan, 2005; National Research Council, 2000; Franke og Kazemi, 2001). Í stærðfræði felst ekki einungis reikningur heldur einnig meðal annars rökfræði, að leysa verkefni og að greina mynstur (National Research Council, 2000, bls. 164). Þetta er ekki hægt að læra með utanbókarlærdómi. Svissneski sálfræðingurinn Jean Piaget hafnaði á fjórða áratug 20. aldar hugmyndinni að það að læra væri það að leggja aðferðir á minnið. Hann hélt því fram að sannur lærdómur fælist í því að skilja hvernig hugmyndir tengjast saman og virka (Piaget, 1937). Samt sem áður er algengt að nemendur leggi á minnið hvert skref sem framkvæma þarf í útreikningum og beiti síðan þeim skrefum hugsunarlaust án skilnings á dæmum (McNeal, 1995). Það sem skiptir meginmáli í huga margra nemenda er hvort svarið sé rétt eða rangt. Það að nemendur haldi að stærðfræði byggist bara á réttu eða röngu svari kemur ekki á óvart þegar skoðað er hvernig stærðfræðikennsla er oft uppbyggð. Í flestum stærðfræðiáföngum í íslenskum framhaldsskólum er lítil áhersla á að þróa og skilja óhlutbundnar hugmyndir, stærðfræðilega rökfærslu og sjálfstæða lausn verkefna. Auðvitað skiptir máli að geta fengið rétt svar en stærðfræðin byggir á miklu fleiru. Samkvæmt aðalnámskrá framhaldsskóla (Mennta- og menningamálaráðuneytið, 2011) eiga nemendur eftir stærðfræðiáfanga á öðru, þriðja og fjórðu þrepi í íslenskum framhaldsskólum að geta komið frá sér efni stærðfræðinnar í mæltu og rituðu máli, áttað sig á tengslum ólíkra aðferða í stærðfræði, geta beitt stærðfræðilegri hugsun og bæði fylgt gefinni röksemdarfærslu og byggt upp eigin röksemdarfærslu. Ljóst er að það er ekki bara lokasvar í svarreit sem skiptir máli í stærðfræðinámi. Þrátt fyrir það er algengt að nemendur sé ætlað að stinga tölum inn í formúlu sem þeir finna á jöfnublaði. Fáir nemendur líta á stærðfræðitíma sem stað til að njóta fegurðarinnar í stærðfræði og velta fyrir sér djúpum spurningum (Boaler, 2015, bls. 100). Það veldur því að þekking nemenda verður grunn og án mikils skilnings (Hiebert, 2003). Margir fara í gegnum sína skólagöngu án þess að hafa skilning á stærðfræði. Jafnvel nemendur sem standa sig vel í stærðfræði í skóla hafa oft lítinn skilning á því sem þeir eru að gera. Djúpur skilningur á efni hjálpar nemendum að útvíkka þá þekkingu sem maður hefur yfir á önnur svið í lífinu (Skemp, 1978).

Til að nemendur teljist hafa náð tökum á námsefni í stærðfræði, geti notað námsefnið og tengt þekkingu sína við aðrar undirgreinar í stærðfræði og önnur fög þurfa þeir að hafa skilning (Sierpinska, 1994). En hvað er verið að meina með orðinu skilningur? Samkvæmt Stóru orðabókinni um íslenska málnotkun er skilningur skilgreindur sem „vitsmunalegt innsæi“(Jón Hilmar Jónsson, 2005). Vitsmunalegt innsæi nær vel utan um þá hugmynd sem verður hér notuð til að lýsa skilningi. Fræðimenn hafa leitast eftir að lýsa skilningi og hér munum við skoða nokkrar lýsingar.

Skemp (1978) kemur með þá tilgátu að skilning megi flokka í venslaskilning (e. relational understanding) og tækjaskilning (e. instrumental understanding). Með venslaskilningi á Skemp við að vita bæði hvað á að gera og af hverju það virkar. Með tækjaskilningi á hann við að nemandinn þekkir reglu og kann að nota hana (Skemp, 1978). Skoðum dæmi:

Kennari segir nemendum sínum að $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ ef $x \in \mathbb{R}$ og $n \in \mathbb{Z}_+$. Nemandi er beðinn um að reikna $\frac{d}{dx}x^3$ og segir að svarið sé $3x^2$. Kennarinn var að kenna nemandanum tækjaskilning og nemandinn skilur að þegar hann var beðinn um að reikna $\frac{d}{dx}x^3$ átti hann að nota regluna sem kennarinn hafði sagt honum frá. Skemp nefnir að nemandi með tækjaskilning myndi segja að hann skilji því hann kann að nota rétta reglu og fær rétt svar (Skemp, 1978).

Skemp (1978) setti fram dæmi þar sem nemandi var beðinn um að reikna flatarmál svæðis sem er 20 cm langt og 15 metra breitt. Nemandinn svaraði „300 fersentímetrar" og þegar hann var spurður af hverju hann notaði fersentímetrar svaraði hann með því að flatarmál væri alltaf mælt í fersentímetrum. Hér hefur nemandinn tækjaskilning því hann kann að nota það að flatarmál rétthyrnings sé lengd sinnum breidd. En til að nemandinn geti leyst dæmið rétt þarf hann annað hvort að læra nýja reglu um að einingar verða að vera þær sömu þegar reiknað er flatarmál, eða hafa venslaskilning. Þrátt fyrir að tækjaskilningur sé algengur og ekki slæmur þá hefur venslaskilningur meðal annars þá kosti að með venslaskilningi er auðveldara að tengja gamla þekkingu við nýja og það er auðveldara að muna reglur sem maður skilur (Skemp, 1978).

Sumir fræðimenn líta á það að skilja sem það að „skilja hvers vegna", eins og Piaget túlkar skilning í bók sinni Success and Understanding (Piaget, 1974). Sú túlkun er hentug í stærðfræði þar sem við viljum að nemendur skilji meðal annars af hverju þeir megi nota ákveðna reglu í ákveðnu dæmi, af hverju brotið $1/2$ sé það sama og brotið $3/6$ og af hverju diffurkvóti falls f í x_0 sé sá sami og hallatala snertils við f í x_0.

Sierpinska (1994) fjallar um hugtakið „góður skilningur" í bók sinni Understanding in Mathematics. Samkvæmt Sierpinska nota kennarar oft hugtakið skilningur þegar þeir eru að meina að nemendur hafi skilið efnið nægilega vel miðað við þeirra eigin staðla. Ef kennari segir að nemendur skilji ekki efnið, þá er hann oft að meina að nemendur hafi ekki náð þeim skilningi á efninu sem hann gerir ráð fyrir að nemendur hafi náð. Nemendurnir geta til dæmis hafa náð tækjaskilningi á efninu en ekki venslaskilningi (Skemp, 1978) eða síðan gætu nemendurnir hafa náð skilning á ákveðnu dæmi en ekki á hugtaki í heild sinni (Sierpinska, 1994). Skoðum dæmi þar sem venslaskilningur, tækjaskilningur, skilningur samkvæmt Piaget og skilningur samkvæmt Sierpinska er skoðað.

Jón hefur lært að diffra veldisföll og summur. Þegar Jón fær dæmið $\dfrac{d}{dx}(x^3+x)$, þá veit hann að $\dfrac{d}{dx}x^3 = 3x^2$ og $\dfrac{d}{dx}x = 1$. Einnig veit hann að

$$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x).$$

Jón getur litið svo á að hann hafi skilning á diffrun ef hann kann þessar reglur utanbókar og kann að nota þær. Það væri tækjaskilningur. Til að skoða skilning Jóns gefur kennarinn hans honum dæmið $\dfrac{d}{dx}(x^3 \cdot x)$. Hér koma dæmi um hvað Jón gæti hugsað þegar hann fær dæmið í hendurnar. Svörin eru byggð á eigin reynslu höfundar sem stærðfræðikennari.

- „Ég kann ekki að diffra margfeldi. Get ég notað aðferð sem ég kann til að leysa dæmið? Ég veit að $x^3 \cdot x = x^4$ og ég kann að diffra x^4. Ég fæ því

  $$\frac{d}{dx}(x^3 \cdot x) = \frac{d}{dx}x^4 = 4x^3.\text{“}$$

  Þessi hugsun sýnir ákveðinn venslaskilning, Jón veit að hann kann ekki að diffra margfeldi og hann er ekki að búa sér til nýjar reglur. Hann finnur leiðir til að reikna dæmið með því sem hann kann. Hann sýnir einnig tækjaskilning á reglunum og nægilega góðan skilning samkvæmt mörgum kennurum. Jón skilur af hverju aðferðin virkar því $x^3 \cdot x = x^4$ gildir alltaf.

- „Þar sem $\frac{d}{dx}(f(x) + g(x)) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$ þá hlýtur að gilda að

  $$\frac{d}{dx}\left(f(x) \cdot g(x)\right) = \frac{d}{dx}f(x) \cdot \frac{d}{dx}g(x)$$

  ég fæ því

  $$\frac{d}{dx}(x^3 \cdot x) = 3x^2 \cdot 1 = 3x^2.\text{“}$$

  Hér getur kennari Jóns litið svo á að Jón hafi ekki skilning á diffrun. Venslaskilningur er ekki til staðar og ekki heldur skilningur samkvæmt Piaget. Jón hefur samt ákveðinn tækjaskilning á diffrun, þó hann sé ekki nægilegur til að vita hvenær reglurnar gilda, því hann kann að diffra veldisföll. Það sem Jón vantar upp á skilning er að skilja hvenær reglur gilda og að hann geti ekki búið til nýjar reglur án þess að vera búinn að færa rök fyrir því að þær gilda.

- „Ég kann ekki að diffra margfeldi en skilgreiningin á diffrun segir að ég geti notað

  $$\lim_{x \to x_0} \frac{x^3 \cdot x - x_0^3 \cdot x_0}{x - x_0}$$

  til að finna afleiðuna, ef hún er til. Ég fæ þá

  $$\begin{aligned}\frac{d}{dx}(x^3 \cdot x) &= \lim_{x \to x_0} \frac{x^3 \cdot x - x_0^3 \cdot x_0}{x - x_0} = \lim_{x \to x_0} \frac{(x - x_0)(x^3 + x^2x_0 + xx_0^2 + x_0^3)}{x - x_0} \\ &= \lim_{x \to x_0} (x^3 + x^2x_0 + xx_0^2 + x_0^3) = 4x_0^3.\text{“}\end{aligned}$$

  Hér hefur Jón þann skilning að ef hann getur ekki leyst dæmið, þá getur hann alltaf leitað til baka í skilgreininguna. Það er venslaskilningur, tækjaskilningur á skilgreiningunni á diffrun og væri einnig talið nægilega góður skilningur af mörgum kennurum. Aftur á móti, þá sýnir þessi lausn ekki hvort Jón hafi skilning eins og Piaget túlkar hann því það er ekkert sem bendir til þess að Jón skilji af hverju hann megi nota skilgreininguna.

Í öllum þessum þremur dæmum þá sýnir Jón skilning. Líklegast mun kennarinn ekki líta svo á að hann hafi góðan skilning nema hann reyni að leysa dæmið með aðferð sem virkar. En í dæmunum hér að ofan sést að ákveðinn skilningur felst í því að vita hvenær maður getur notað reglur sem maður kann og hvenær þær reglur duga ekki til.

Jón sýnir venslaskilning í fyrstu og þriðju lausninni þar sem hann veit hvernig reglur virka, getur tengt þær við ákveðnar staðreyndir sem liggja að baki og getur tengt þær staðreyndir við verkefnið sem hann stendur frammi fyrir. Það á vel við í dæmunum hér að ofan þar sem í dæmunum þar sem Jón fær rétt svar hefur hann nýtt þær staðreyndir sem hann þekkir um diffrun og tengir þær við verkefnið til að leysa það.

Nemandi sem hefur lært stærðfræði frá því á fyrsta ári í grunnskóla og alltaf lært reglur utan bókar myndar smám saman þá skoðun innra með sér að stærðfræði sé eitthvað til að læra utan bókar. Það að skilja stærðfræði gæti orðið jafngilt því að muna allar reglurnar fyrir viðkomandi nemanda. Skoðunin myndast rólega og verður með tímanum rótgróin. Slíkar skoðanir eru lengi að breytast. Nemandi sem hefur alla sína skólagöngu lært reglur utanbókar mun ólíklega breyta því þrátt fyrir að einhver kennari segi honum að betra sé að láta námið byggja á skilningi. Nemandinn þarf líka sjálfur að ákveða að breyta hugsunarhætti og vera tilbúinn í það (Liljedahl, 2005). Þegar einhver hluti námsefnisins virkar skiljanlegur fyrir nemanda er það innri löngun til að skilja sem hvetur hann til að halda áfram. Nemandinn vill halda áfram að læra því það er góð tilfinning að geta skilið og tengt nýjar hugmyndir við gamlar (Lester og Lambdin, 2007). Það er erfiðara og krefst meiri vinnu að öðlast skilning en að læra nokkrar reglur utanbókar. Aftur á móti er mun erfiðara að muna margar reglur ef maður skilur þær ekki. Sérstaklega ef maður getur ekki leitt reglurnar út sjálfur. Ef margar ósamanhangandi reglur eru lagðar á minnið fyrir próf eru yfirgnæfandi líkur á að mestallt sé horfið úr minni stuttu eftir próf. En með skilningi myndast tengingar milli ólíkra reglna og hugtaka og talsvert minna, ef eitthvað, þarf að leggja á minnið (Lester og Lambdin, 2007). Það hjálpar einnig að þegar skilningur er kominn á einum hluta námsefnisins verður auðveldara að skilja þann næsta.

Hversu góður sem kennari er þá getur hann ekki látið nemendur skilja, en hann getur stuðlað að skilningi. Skilningur skapast ekki á sama tíma hjá öllum og kennari þarf að hafa það í huga að þrátt fyrir að sumir skilji, getur verið að það séu margir sem skilja ekki enn þá. Sumir upplifa skilning sem dimmt herbergi sem er hægt og rólega lýst upp, aðrir sem skyndilega birtu í áður dimmu herbergi (Liljedahl, 2005). Oft er talað um AHA eða eureka augnablik sem stundina þar sem skilningur skapast skyndilega. Eitthvert dæmi, einhver setning frá kennara, bók eða samnemanda geta skyndilega opnað augu manns og fengið skilning til að skapast á augabragði. Oft þarf ekki nema örlítinn tíma fyrir heilann að hvíla sig fyrir skilning að skapast skyndilega. Þessi AHA augnablik geta aukið áhuga á stærðfræði til muna. Tilfinningin að hafa náð að leysa eða skilja eitthvað sem reyndi á vekur ánægju og hvatningu innra með nemendum og veitir þeim innblástur til að halda áfram (Liljedahl, 2005). Mörg og regluleg verkefni sem byggjast á skilningi og AHA augnablikum hafa möguleika á því að breyta skoðunum nemenda á stærðfræði og hjálpa þeim að finna gleði og auka sjálfstraust sitt í stærðfræði (Barnes, 2000).

AHA augnablik eru ekki ný af nálinni. Eitt frægasta AHA augnablikið átti sér stað þegar Arkímedes kallaði „Eureka“ í baðkarinu sínu eftir að hafa uppgötvað lögmálið sem kennt er við hann (Stein, 1999, bls. 3). Önnur þekkt saga, þó hún sé líklega uppspuni, er frá Newton sem á að hafa uppgötvað þyngdaraflið þegar epli datt af tré (Fara, 1999). Franski stærðfræðingurinn Henri Poincaré upplifði AHA augnablik þegar hann tók sér hlé frá því að leysa verkefni tengt Fuchsian föllum með því að fara í vettvangsferð um jarðfræði Frakklands með nemendum í námuverkfræði. Skyndilega, án þess að hafa verið að leita að því, áttaði hann sig á því að vörpunin sem hann hafði notað til að skilgreina Fuchsian föll væri vörpun úr óevklíðskri rúmfræði. Um leið og hann kom heim gat hann skrifað niður sönnunina sem hann hafði verið að vinna í (Irvine, 2015, bls. 3-4). AHA augnablik eru algeng en fólk tekur mismikið eftir þeim. Í rannsókn Liljedahls á AHA augnablikum kom í ljós að þegar nemendur upplifðu AHA augnablik í stærðfræðitíma þá olli það því að 61 af 76 nemendum urðu jákvæðari gagnvart stærðfræði og gagnvart eigin stærðfræðilegri getu (Liljendahl, 2004). Í mínu starfi sem stærðfræðikennari finnst mér fátt betra en þegar skyndilega heyrist frá nemanda eftir útskýringar á efni „Vá! Ég skil núna allan kaflann!“ og nemandinn fer að deila þessum nýja skilningi með sínum samnemendum. Þessi skyndilegi skilningur eða AHA augnablik veldur oft löngun innan með manni til að deila þessari nýju uppgötvun með öðrum.

En hvað er hægt að gera sem kennari? Kennarar eru hvattir til að spyrja opinna spurninga og biðja nemendur að útskýra hugsun sína. Það er þó ekki nóg. Það þarf að byggja upp þekkingu á undirstöðuatriðum námsefnisins og sjá til þess að þekking á fyrra námsefni sé nægilega góð til að skilningur geti myndast á nýju efni. Einnig þarf að búa til öruggt og hvetjandi umhverfi til að leysa erfið verkefni (Ball og Bass, 2003). Öruggt og hvetjandi umhverfi byggist meðal annars á því að nemendur séu óhræddir við að gera mistök, spyrja og nýta sér aðstoð frá samnemendum sínum. Samskipti, bæði meðal nemenda og milli nemenda og kennara, eru eitt það mikilvægasta þegar kemur að skilningi nemenda (Krummheuer, 1993). Einnig veitir samvinna nemenda jákvæðari námsupplifun en einstaklingsvinna ein og sér. Samvinna getur myndað tengsl milli nemenda í námi og hvatt þá til að leita hver til annars eftir aðstoð (Liljedahl, 2005). Eitt sem einkennir nemendur sem skara fram úr í stærðfræði er að þeir nálgast stærðfræði með því hugarfari að þá langar að skilja hana. Þeir leita síðan að mynstrum og tengingu milli hluta til að mynda eigin skilning (Boaler, 2015, bls. 34). Samvinna nemenda í tímum getur hjálpað fleirum að tileinka sér það hugarfar. En til þess þarf nægan tíma til að kynnast efninu. Þrátt fyrir að flestir nemendur á Íslandi verji meira en þúsund klukkustundum í stærðfræðitímum gegnum sína skólagöngu virðist tíminn ekki vera nægur til leggja fyrir verkefni sem byggja upp eigin skilning nemenda því það þarf fyrst að klára aragrúa af reiknileiknisdæmum.

2.3. Spurningar í kennslu

Í kennslu þurfa bæði kennarar og nemendur að spyrja spurninga. Spurningar kennara hjálpa nemendum að fylgjast með hvort þeir séu að skilja og eiga að hvetja til dýpri hugsunar á efni eða umræðu (Boaler og Brodie, 2004). Spurningar nemenda hjálpa þeim að skilja ákveðin atriði sem þeir skilja ekki eða hjálpa þeim áfram með að leysa verkefni. Það eru þó ekki allar spurningar sem eru gagnlegar.

Spurningar nemenda voru flokkaðar af Good, Slavings, Harel og Emerson (1987) í tíu flokka. Þeir eru

- Útskýringarspurningar (e. explanation questions): Spurningar þar sem nemandinn leitar eftir merkingu eða röksemdarfærslu til að hjálpa sér að skilja hugtak, hugmynd, verkefni eða aðgerð.

- Upplýsingaspurningar (e. information questions): Spurningar þar sem nemandinn leitar að ákveðnum fræðilegum upplýsingum.

- Skýrleikaspurningar (e. clarification questions): Spurningar þar sem leitað er eftir nánari útskýringu á upplýsingum, aðgerðum eða verkefni sem var framkvæmt af kennara eða öðrum en umræddum nemanda.

- Staðfestingarspurningar (e confirmation questions): Spurningar þar sem nemandinn leitar að staðfestingu á eigin svari, aðferð eða aðgerð.

- Verklagsspurningar (e. procedural questions): Spurningar um almennt verklag í skólastofunni.

- Forvitnisspurningar ótengdar verkefni (e. non-task curiosity questions): Fræðilegar spurningar sem tengjast ekki verkefninu sem verið er að vinna í þá stundina.

- Spurningar sem beina athygli frá verkefni (e. diversion questions): Spurningar sem eru gerðar til að beina athygli kennara eða samnemenda frá verkefninu.

- Athyglisspurningar tengdar verkefni (e. on-task attention questions): Spurningar sem eru tengdar verkefninu en eru aðallega spurðar til að draga athygli að nemandanum sjálfum eða til að sýna sig.

- Athyglisspurningar ótengdar verkefni (e. off-task attention questions): Spurningar sem eru ekki tengdar verkefninu og eru aðallega til að draga athygli að nemandanum sjálfum eða sýna sig.

- Aðrar spurningar (e. unknown questions)

Spurningar sem beina athygli frá verkefni ásamt athyglisspurningum eru ekki að fara að hjálpa nemendum að dýpka eigin skilning og komast áfram í verkefninu sem þeir eru að leysa. Þegar þannig er spurt er það oft til að trufla kennslustund eða til að reyna að sýna að kennara fram á að nemandi sé að vinna þó svo sé ekki. Forvitnisspurningar ótengdar verkefni eru jákvæðar því nemandinn er forvitinn um efnið, en í sumum tilfellum eiga þær frekar heima utan kennslustofunnar eða eftir kennslustundina. Fleiri hafa reynt að flokka spurningar nemenda, þar má nefna West og Pearson (1994) sem flokkuðu spurningar nemenda í

- Verklagsspurningar (e. classroom procedures): Spurningar um hvað verður á næsta prófi, hvaða dæmi eigi að leysa í tímanum, hvaða blaðsíðu á að vera að skoða og þess háttar.

- Efnistengdar spurningar (e. general inquiry - content): Spurningar varðandi efnið sem verið er að skoða

- Skýrleikaspurningar (e. clarification): Spurningar þar sem beðið er um nánari útskýringar á efni sem kennarinn hefur þegar útskýrt

- Staðfestingarspurningar (e. confirmation): Spurningar þar sem nemandinn vill fá staðfestingu á eigin túlkun eða svari

- Kennaratengdar spurningar (e. general inquiry - teacher): Spurningar þar sem nemandi spyr kennara hvað honum finnst.

- Aðrar spurningar (e. unknown/other): Spurningar sem ekki er hægt að flokka í neinn af ofangreindum flokkum.

Hjá West og Pearson er enginn flokkur af spurningum undir spurningar sem viljandi trufla kennslustundina. Þannig spurningar myndu flokkast hjá West og Pearson sem aðrar spurningar. Að öðru leyti eru flokkar West og Pearson svipaðir þeim hjá Good og félögum. Teodoro, Donders, Kemp-Davidson, Robertson og Schuyler (2011) flokkuðu spurningar nemenda í tvo flokka. Þeir eru djúpar spurningar og yfirborðsspurningar. Yfirborðsspurningar einkennast af því að vera spurningar þar sem svarið gefur lítið af upplýsingum, jafnvel gæti svarið verið einungis já eða nei, og dýpkar ekki skilning. Djúpar spurningar gefa svar sem inniheldur hjálplegar upplýsingar, útskýrir, hjálpar til við að dýpka hugsunarhátt og tengja saman ólíkar hugmyndir. Að lokum höfum við Liljedahl (2020, bls. 83-87) sem flokkar spurningar nemenda í eftirfarandi þrjá flokka

- Nálægðarspurningar (e. proximity questions): Spurningar sem nemendur spyrja því kennarinn er nálægt, nemendur nota ekki svarið í áframhaldandi hugsun.

- Hætta-að-hugsa spurningar (e. stop-thinking questions): Spurningar eins og „Þurfum við að læra þetta?“, „Verður þetta á prófinu?“ og „Er þetta rétt?“. Byggja á því að nemendum finnst erfitt að hugsa sjálfstætt og það væri auðveldara ef kennarinn gæti bara gert það fyrir þá.

- Halda-áfram-að-hugsa spurningar (e. keep-thinking questions): Spurningar sem nemendur spyrja þannig að þeir geti haldið áfram með verkefnið sem þeir eru að leysa. Þær geta meðal annars verið að falast eftir nánari útskýringu frá kennara eða að nemandinn vilji fá að útvíkka verkefnið.

Eftir samanburð á þessum flokkum ásamt því að hafa rætt við framhaldsskólakennara og skoðað eigin reynslu hafa spurningaflokkarnir hér verið sameinaðir í fimm flokka. Ástæðan fyrir flokkuninni er sú að margir flokkarnir hjá Good og félögum og hjá West og Pearson voru svipaðir og viðbrögð kennara við spurningunum væru eins. Flokkun Teodoro og félaga í djúpar spurningar og yfirborðsspurningar er þægileg en þar vantar spurningar með því markmiði að trufla kennslustund. Einnig eru yfirborðsspurningar mjög stór flokkur af spurningum og viðbrögð kennara við spurningunum væru ólík eftir tegundum yfirborðsspurninga. Flokkarnir þrír sem Liljedahl setti fram eru hentugir en hætta-að-hugsa spurningar er stór flokkur af spurningum, eins og yfirborðsspurningar Teodoro og félaga. Spurningarnar „Er þetta rétt?“, „Hvenær er næsta próf?“og „Varst þú líka í okkar framhaldsskóla?“ eru allt hætta-að-hugsa spurningar en viðbrögð kennara við spurningunum eru ólík. Spurningarnar fjalla ýmist um verkefni dagsins, skipulag eða eitthvað sem tengist ekki faginu. Flokkarnir fimm eru eftirfarandi:

- *Öráreitisspurningar.* Öráreitisspurningar ætti að stoppa. Spurningarnar eru varðandi eitthvað sem nemandinn gæti auðveldlega flett upp í bók, séð á veggspjaldi eða á sýnidæmi. Nemandinn er fastur í verkefninu en kann ekki að nýta sér þær auðlindir sem eru í boði til að komast yfir hjallann. Ef kennarinn svarar þessum spurningum er hann að koma í veg fyrir að nemandinn öðlist sjálfstæði í vinnubrögðum. Öráreitisspurningum má lýsa með flokknum yfirborðsspurningar hjá Teodoro o.fl. (2011). Þessar spurningar eru oftast úr flokkunum útskýringarspurningar, upplýsingaspurningar, staðfestingarspurningar og verklagsspurningar miðað við flokka Good o.fl. (1987) eða flokkunum efnistengdar spurningar eða staðfestingarspurningar frá West og Pearson (1994).

- *Ásýndarspurningar.* Þessar spurningar koma þegar nemendur vilja sýna kennaranum að þeir séu að vinna, oft því þeir voru ekki að vinna. Spurningar sem nemendur vita nú þegar svar við eða gætu auðveldlega fundið út úr en spyrja til að láta það líta út fyrir að þeir hafi verið að vinna, ekki bara spjalla eða gera annað. Ásýndarspurningar er annað dæmi um spurningar sem koma úr flokknum yfirborðsspurningar hjá Teodoro o.fl. (2011). Þessar spurningar flokka Good o.fl. (1987) í athyglisspurningar tengdar verkefni og athyglisspurningar ótengdar verkefni. Liljedahl (2020) kallar þessar spurningar nálægðarspurningar.

- *Verklagsspurningar.* Spurningar tengdar framkvæmd verkefnisins. Þessar spurningar ættu ekki að koma ef verkefnið er nægilega skýrt sett fram og nemendur eru að fylgjast með þegar verkefnið er kynnt. Annað hvort hafa nemendur ekki verið að fylgjast með eða verkefnið var ekki nægilega skýrt fram sett af kennara. Verklagsspurningar eru oftast yfirborðsspurningar þar sem svör þeirra bæta ekki skilning og eru oft aðeins já eða nei (Teodoro o.fl., 2011). Bæði West og Pearson (1994) og Good o.fl. (1987) kalla þennan flokk spurninga verklagsspurningar.

- *Skilningsspurningar.* Þetta eru spurningarnar sem hjálpa nemendum mest. Skilningsspurningar byggja meðal annars að spyrja út í hugtök sem þeir skilja ekki nægilega vel og þurfa að fá nánari útskýringu til að geta tengt betur við hugtakið. Einnig væru hér spurningar hjá nemendum sem eru fastir í verkefni og komast ekki áfram út af skilningi og svar kennarans þarf að hjálpa þeim að skilja. Kennarinn á ekki að gefa nemendum næsta skref heldur hjálpa þeim með eigin hugsunargang. Skilningsspurningar flokka Teodoro o.fl. (2011) sem djúpar spurningar. Flokkarnir útskýringarspurningar, upplýsingarspurningar og nánari útskýringarspurningar hjá Good o.fl. (1987) eru hér teknir saman í flokkinn skilningsspurningar. Flokkarnir efnistengdar spurningar og nánari útskýringaspurningar hjá West og Pearson (1994) eru hluti af skilningsspurningnum.

- *Aðrar spurningar.* Í flokknum aðrar spurningar eru spurningar sem eiga ekki heima í kennslustund. Það eru spurningar þar sem markmiðið er að beina athygli frá verkefnum kennslustundarinnar. Þessar spurningar eru hvorki flokkaðar í yfirborðsspurningar né dýpri spurningar (Teodoro o.fl., 2011) því þær tengjast ekki efni kennslustundar. Flokkarnir forvitnisspurningar ótengdar verkefni, spurningar sem beina athygli frá verkefni og aðrar spurningar hjá Good o.fl. (1987) falla allir undir aðrar spurningar.

Með því að flokka spurningar í áðurnefnda flokka getur kennari verið tilbúinn með svör við hæfi. Skilningsspurningar eru einu spurningarnar sem eyða skal tíma í að svara því þær eru þær einu sem byggja á að dýpka skilning nemenda. Samkvæmt Rop (2002) er hægt að svara öráreitisspurningum og ásýndarspurningum með því að hunsa spurninguna eða spyrja nemandann sjálfan að sömu spurningunni. Meðal annarra möguleika er að benda á hvar nemandinn getur fundið svarið eða segja nemandanum að leita sjálfur. Sömu viðbrögð virka einnig þegar um er að ræða verklagsspurningar. Þegar kemur að skilningsspurningum ætti svarið að hjálpa nemandanum áfram. Til að svara slíkum spurningum nemenda hefur Drageset (2015) flokkað svör kennara í þrjá flokka eftir því hvort nemandinn sé á réttri leið, rangri leið eða þarf að skoða ákveðin atriði betur. Flokkarnir eru

- *Beina annað.* Þessi viðbrögð eru notuð þegar nemandinn er ekki á réttri leið. Kennarinn stingur upp á annarri aðferð til að leysa verkefnið eða spyr spurninga sem hjálpa nemandanum að átta sig hvað hafi misfarist.

- *Miða áfram.* Þessi viðbrögð eru notuð til að hjálpa nemendum áfram þegar þeir eru á réttri leið. Kennarinn getur komið með sýnidæmi, komið með einfaldara dæmi til að leysa fyrst eða spurt spurninga sem hjálpa nemendum að uppgötva næsta skref upp á eigin spýtur.

- *Beina athygli að.* Þessi viðbrögð eru notuð til að fá nemendur til að líta til baka á eitthvert skref sem þyrfti að skoða betur. Kennarinn getur beðið um rökstuðning frá nemendunum, beðið samnemendur um að lesa yfir hver hjá öðrum, beint athygli að ákveðnu skrefi, beðið um að endursegja í höfuðatriðum eða sýna hvernig skrefið liti út í öðru samhengi.

Kennarar þurfa einnig að spyrja spurninga. Í verkefnunum sem fylgja í viðauka A er gert ráð fyrir að kennarinn biðji nemendur um að rökstyðja svör sín og spyrji nánar út í þau. Gera þarf ráð fyrir að í hópnum geti verið nemendur sem hafa þá reynslu úr stærðfræðitímum að ef kennari véfengir svar, þá sé það rangt. Nemendur geta byrjað að breyta svörum sínum út af félagslegum aðstæðum. Þær geta meðal annars verið að kennarinn spyrji nánar út í svarið eða að bekkjarfélagar komi með annað svar (Yackel og Cobb, 1996). Þar sem æskilegt er að markmið stærðfræðináms sé að gera nemendur að stærðfræðilegum hugsuðum (Sadler, 1998) þarf að byggja upp stærðfræðilegt sjálfstraust nemenda til að geta staðið með sínu svari. Það á því að skapa námsumhverfi þannig að félagslegar aðstæður hafi ekki áhrif á svar nemandans heldur aðeins stærðfræðilegar röksemdarfærslur (Yackel og Cobb, 1996).

2.4. Skilgreiningar á diffrun

Þegar nemendur læra að diffra fá þeir alls kyns diffrunarreglur í hendurnar. Þeir þurfa að læra að diffra veldisföll, hornaföll, vísisföll, logra, samsett föll, summu falla, margfeldi falla og kvóta falla til að geta diffrað. Ef þessar reglur eru lærðar utanbókar án skilnings, hvað gerir nemandi þá ef hann gleymir einni reglu? Eða ef nemandinn er óviss hvort það var summa eða frádráttur í reglu um diffrun kvóta? Í sumum skólum fá nemendur jöfnublað og þurfa þá að skilja enn minna af því sem er í gangi. Þá byrja sumir að leita að reglu á jöfnublaðinu sem lítur út eins og dæmið og nota hana án þess að velta því nánar fyrir sér. Er skilningurinn nægilega góður ef maður er ósjálfbjarga án jöfnublaðs? Verkefnið sem fylgir í viðauka A.1 var samið með það í huga að nemendur fái tækifæri til að byrja að skilja diffrun sem hugtak, aðferðir til að diffra og notagildi diffrunar. Engar jöfnur verða gefnar og engar skilgreiningar, heldur verður reynt að fá nemendur til að leiða jöfnur út sjálfir.

Í fjórum ólíkum kennslubókum er diffurkvóti eða afleiða skilgreind á eftirfarandi vegu:

> Látum U vera opið hlutmengi í $\mathbb{R}$ og látum $f : U \to \mathbb{R}$ vera fall. Þá er f diffranlegt í $a \in U$ með afleiðu $f'(a)$ ef markgildið $f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}(f(a+h) - f(a))$ er til. (Hubbard og Hubbard, 2009)

> Fall f er sagt vera diffranlegt í $x_0 \in \mathbb{R}$ ef markgildið $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ er til. Þá er markgildið táknað $f'(x_0)$ og nefnist diffurkvóti fallsins f í x_0 (Guðjónsson o.fl., 2015).

> Markgildið sem mismunahlutfallið $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ nálgast þegar h stefnir á 0 er kallað afleiða fallsins $y = f(x)$ í punktinum $x = a$ og er ritað $f'(a)$ (Björk o.fl., 1983; Björk og Brolin, 2001).

> Ef, fyrir gefið x, $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$ stefnir á eiginlegt markgildi þegar h stefnir á 0 er þetta markgildi, táknað með $f'(x)$, kallað afleiða f í x. Fallið f er sagt vera diffranlegt í því gildi á x (Burkill, 1978).

Efsta skilgreiningin kemur úr kennslubók frá 2009 fyrir háskólanemendur um örsmæðareikning vigra og línulega algebru. Næsta kemur úr kennslubók sem var skrifuð af kennurum Menntaskólans í Reyjavík fyrir nemendur skólans. Þriðja kemur úr sænskri framhaldsskólakennslubók frá 1983 sem var þýdd og aðlöguð að íslenskum markaði árið 2001. Sú síðasta er úr háskólakennslubók eftir enskan stærðfræðing og Adamsverðlaunahafann John Charles Burkill frá 1978 (Pitt, 1994). Þó svo að þessar skilgreiningar komi úr fjórum ólíkum kennslubókum, af ólíkum erfiðleikastigum, þá eru þær allar nánast eins. Fyrir nemanda að byrja að læra um diffurkvóta og föll eru þessar skilgreiningar ekki eins augljósar og þær eru fyrir vana stærðfræðiiðkendur. Allar þær kennslubækur sem voru skoðaðar í tengslum við þetta verkefni eru með útskýringartexta. Sá texti er hvorki auðskiljanlegur fyrir nemendur sem eru að taka sín fyrstu skref í diffrun né er hann lesinn af mörgum þeirra. Það er þekkt vandamál að nemendur lesi ekki kennslubækurnar sínar í stærðfræði heldur noti þær einungis sem uppflettirit fyrir dæmi og reglur.(Weinberg o.fl., 2012)

Þrátt fyrir að allar þær kennslubækur sem voru skoðaðar fyrir þetta verkefni reyndu að útskýra af hverju mismunahlutfallið $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ eða $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ væri notað, þá er algengt að nemendur leggi hlutfallið bara á minnið eða treysta því að það sé á gefnu jöfnublaði. Aðrir munu aldrei þurfa að nota annað en reglur um diffrun fyrir ýmis föll og sleppa því alveg að pæla í þessu hlutfalli. Í verkefninu hér í viðauka A.1 var lögð áhersla á að nemendur myndu skilja hvers vegna þetta hlutfall væri notað í skilgreiningu á diffrun og að þeir myndu leiða það út að hluta til á eigin spýtur.

Til að gera nemendur að stærðfræðilegum hugsuðum þurfa þeir að fá tækifæri til að skilja á eigin veg. Til að geta skilið skilgreininguna verða nemendur að skilja hvað felst í diffrun, hvað mismunahlutfallið $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ eða $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ táknar óháð öðrum hlutum skilgreininganna og hvað myndi valda því að markgildið $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ eða $\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ væri ekki til. Í dæmum sem nemendur fá í hendunar þar sem þeir eiga að finna afleiðu falls er yfirleitt hægt að finna afleiðuna. Það væri því eðlilegt að nemandi myndi spyrja sig af hverju skilgreining á diffurkvóta sé ekki einfaldlega:

$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ kallast diffurkvóti fallsins f í x_0 og sagt er að f sé diffranlegt í x_0.

eða

$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ kallast afleiða fallsins f og sagt er að f sé diffranlegt í x.

Líklegt er að nemendur muni eiga í erfiðleikum með að finna dæmi um fall f og punkt $(x_0, f(x_0))$ þannig að f sé ekki diffranlegt í x_0, enda er oft erfitt að finna mótdæmi til að afsanna reglur. Það er samt ekki vitlaust að leyfa nemendum að velta því fyrir sér hvers vegna það standi í skilgreiningu á að fall sé diffranlegt að markgildið verði að vera til. Ef þeir hafa verið að velta því fyrir sér í einhvern tíma áður en þeir fá vísbendingar, þá eru þeir móttækilegri fyrir svarinu.

Ef nemandi finnur fall f og punkt $(x_0, f(x_0))$ þannig að f sé ekki diffranlegt í x_0 væri sniðugt að biðja nemandann um að finna fleiri dæmi. Ef nemendur finna ekkert dæmi eftir margar mínútur af umhugsun, þá er hægt að fara að gefa þeim vísbendingar. Hægt væri að biðja nemanda um að koma með dæmi um fall og punkt $(x_0, f(x_0))$ þar sem markgildi er ekki til í x_0 og biðja hann um að nota það. Eðlilegt væri að nemendur færu að draga þá ályktun að fall væri diffranlegt ef það er samfellt. Þá væri næsta skref að biðja nemendur um að finna samfellt fall f sem er ekki diffranlegt í punkti $(x_0, f(x_0))$. Eftir að hafa sett fram þá reglu að diffranleg föll séu samfelld er algengt að stærðfræðibækur noti dæmið að tölugildisfallið, $f(x) = |x|$, sé ekki diffranlegt í $x = 0$ þó það sé samfellt þar. Hægt er að ræða hvað gerist ef ferillinn er ekki bogadreginn eða „mjúkur". Með þessum vísbendingum gætu nemendurnir áttað sig sjálfir á því að ferlar sem eru ekki samfelldir eru ekki diffranlegir og að tölugildisfallið sé ekki diffranlegt í $x = 0$. Mögulega myndi tölugildisfallið hjálpa til við að finna fleiri föll sem eru samfelld en ekki diffranleg, eins og $f(x) = \sqrt{|x|}$ og ákveðin línuföll á bilum.

Þó er ekki nóg að skilja skilgreininguna til að skilja diffrun þó það sé góð byrjun. Diffurreikningar voru fyrst formlega settir fram undir lok 17. aldar. Isaac Newton hafði verið að einbeita sér að þyngdarafli og hreyfingum reikistjarnanna. Newton vissi að hraði hlutar sem er að falla eykst á hverri sekúndu en hann hafði enga útreikninga fyrir þetta. Til þess að lýsa þyngdarafli þurfti hann aðferð til að lýsa augnabliksbreytingu. Út frá því fór hann að þróa diffurreikninga og aðrar tegundir örsmæðareiknings (Roy, 2011). Á svipuðum tíma var Gottfried Wilhelm Leibniz að setja fram sínar hugmyndir um diffrun. Hann leit svo á að rúmfræðilegar stærðir hefðu diffur. Hann taldi að þegar þær stærðir væru venslaðar hver við aðra uppfylltu diffur þeirra einnig ákveðin vensl. Hann setti fram og sannaði margar af þeim diffrunarreglum sem notaðar eru í dag. Einnig útskýrði hann hvernig afleiður og halli falla tengdust, há- og lággildi, íhvolfun og kúpun og beygjuskilapunkta (Roy, 2011). Örsmæðareikningur olli byltingu í þróun vísinda. Í eðlisfræði er hraða og hröðun lýst með diffrun, hámörkunar og lágmörkunarverkefni eru leyst með diffrun og í hagfræði eru örsmæðareikningar notaðir til að spá fyrir um hagvöxt. Þetta eru bara örfá dæmi um notkun diffurreiknings. Öllum breytingum á tímaeiningu er hægt að lýsa með diffrun á samfelldu og diffranlegu falli. Til að skilja hugtakið diffrun almennilega þarf að skilja hvað felst í augnabliksbreytingu.

2.5. TRU ramminn

Teaching for robust understanding, eða TRU ramminn eins og hann er kallaður, er stuðningsverkfæri fyrir stærðfræðikennara þegar þeir undirbúa kennslu. Ramminn á að hjálpa stærðfræðikennurum að búa til kennsluumhverfi þar sem stuðningur er við sérhvern nemanda til að auka þekkingu, sveigjanleika í námi og til að verða úrræðagóðir og agaðir hugsuðir (Schoenfeld og the Teaching for Robust Understanding Project, 2016). TRU ramminn er ekki samansafn af fyrirmælum eða leiðbeiningum til að ná markmiðum rammans, heldur er hann hjálpartæki byggt á rannsóknum á því hvað skiptir mestu máli í skólastofu. Það eru engar ákveðnar kennsluaðferðir sem ramminn mælir með því það eru til margar ólíkar kennsluaðferðir sem uppfyllia hugmyndir rammans (Schoenfeld, 2015). Ramminn er því ekki kennsluleiðbeiningar heldur stuðningur fyrir kennara til að endurskoða eigin vinnubrögð.

Dr Alan H. Schoenfeld frá Kaliforníuháskóla stýrði rannsóknunum sem nýttar voru til að móta TRU rammann. Schoenfeld er prófessor í menntunarfræði og doktor í stærðfræði frá Stanford háskólanum. Hann er einnig þekktur fyrir að hafa skrifað bækurnar How We Think og Mathematical Problem Solving (Schoenfeld, 2021). Schoenfeld hefur eytt starfsævi sinni í að rannsaka hvernig nemendur hugsa og rökstyðja eigin hugsun og hvernig best sé að kenna og læra stærðfræði (Schoenfeld, 2021). Samkvæmt TRU rammanum byggjast gæði stærðfræðilegrar skólastofu á fimm áhrifaþáttum. Þeir eru:

1. efnistök (e. the content)
2. vitsmunalegar kröfur (e. cognitive demand)
3. einstaklingsmiðun (e. equitable access to content)
4. skuldbinding, áræðni og sjálfsmynd (e. agency, ownership, and identity)
5. leiðsagnarmat. (e. formative assessment) (Schoenfeld og the Teaching for Robust Understanding Project, 2016)

Áhrifaþættirnir voru þýddir yfir á íslensku af Ólöfu Sighvatsdóttur (Ólöf Sighvatsdóttir, 2019) og verða hennar þýðingar á þeim notaðar hér.

2.5.1. Efnistök

Flestir eru með það á hreinu að efnistök kennslustundar skiptir máli þegar kennslustund er skipulögð. Þegar hugað er að efnistökum kennslustundar getur verið að kennarinn velti því fyrir sér hvaða dæmi nemendur eiga að reikna eða hvaða skilgreiningar og setningar hann ætlar að setja fram og útskýra. En í efnistökum felst fleira en hvaða námsefni verður farið yfir í næsta tíma. Kennarinn þarf einnig að íhuga hver tilgangurinn er með kennslustundinni, hvaða efni sé nýtt og hvernig efni kennslustundarinnar tengist við það sem nemandinn veit nú þegar (Schoenfeld og the Teaching for Robust Understanding Project, 2016). Áður en kennslustund er skipulögð er gott að hafa í huga hvernig efni kennslustundarinnar tengist efni annarinnar. Þar er bæði átt við hvernig efni kennslustundarinnar tengist því efni sem nemendur hafa verið að læra fram að kennslustundinni og hvernig efnið tengist námsefni annarinnar í heild sinni. Markmiðið er að innan kennslustundarinnar sé þróun í skilningi á efninu sem verið er að vinna í þá kennslustund og að hugmyndir annarinnar þróist (Schoenfeld, 2015). Efnið á að gera nemendum kleift að efla skilning og þekkingu og verða úrræðagóðir stærðfræðilegir hugsuðir (Schoenfeld o.fl., 2019). Ef efnið er of erfitt fyrir hópinn og nemendur geta ekki tengt það við fyrri efni, er lítið gagn í því. Hinar fjórar víddirnar í TRU-rammanum eru mikilvægar til að koma í veg fyrir að efnið verði nemendum ofviða.

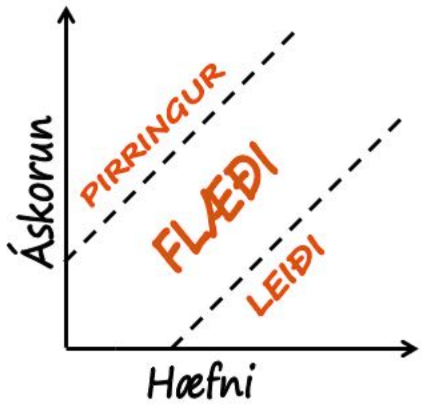
2.5.2. Vitsmunalegar kröfur

Vitsmunalegar kröfur í kennslu byggja á því hve langan tíma nemendur fá til að hugsa, hvaða möguleika þeir hafa ef þeir festast einhvers staðar og hvernig þeir eigi að skila efni af sér. Það að skila bara lokasvari án útreikninga og útskýringa á eigin hugsun gerir minni vitsmunalegar kröfur til nemenda (Schoenfeld og the Teaching for Robust Understanding Project, 2016). Ef nemendur útskýra eigin hugsun, er auðveldara fyrir kennara að koma auga á misskilning eða hjálpa til við að þróa hugmyndir nemandans.

Þegar vitsmunalegar kröfur eru skoðaðar þarf kennarinn að velta fyrir sér hvort nemendur hafi fengið tækifæri á að mynda eigin skilning á stærðfræðilegum hugmyndum (Schoenfeld, 2015). Forðast skal að einungis mata nemendur með efni og vonast til þess að þeir skilji. Nýta þarf tíma í að hjálpa nemendum að mynda eigin skilning. Einnig skiptir máli að velta því fyrir sér hvað gerist ef nemandi er fastur í einhverju verkefni. Nemandinn þarf að vita hvað hann á að gera ef hann getur ekki haldið áfram með verkefni án aðstoðar (Schoenfeld o.fl., 2018). Það að spyrja kennarann strax hvetur ekki til sjálfstæðrar hugsunar. Sumir nemendur eru byrjaðir að spyrja kennarann áður en þeir hafa eytt tíma í að velta verkefninu fyrir sér. Til eru verkfæri í kennslu sem stuðla að því að nemendur hugsi sjálfstætt. Eitt af þeim verkfærum eru fjögur skref sjálfstæðra vinnubragða. Þau eru hugsa, leita, spyrja vin og spyrja kennara og eru tekin í þeirri röð sem hér stendur. Vinnubrögðin skiptast þannig að nemendur eiga að byrja á því að hugsa sjálfir. Ef þeir komast ekki lengra á eigin hugsun þá leita þeir upplýsinga. Þær upplýsingar geta verið meðal annars í kennslubók, í glósum eða á neti. Ef það dugar ekki til þá spyrja þeir vin og reyna að hjálpast að við að finna lausn. Ef ekkert af þessu hjálpar, þá spyrja þeir kennarann (Ali, 2012). Til að stuðla að sjálfstæðri hugsun nemenda þarf að þjálfa þá í að útskýra fyrir kennaranum hvert þeir eru sjálfir komnir í verkefninu og fá aðstoð við að útvíkka eigin hugsun til að komast áfram í dæminu (Ali, 2012). Kennarar ættum að færa okkur frá því að nemendur spyrji aðallega spurningar á borð við „Hvernig leysi ég þetta dæmi“ og í átt að því að spurningarnar verði „Hvernig held ég áfram?“ eftir að hafa útskýrt hugsunargang hingað til og tilraunir sínar til að halda áfram með dæmið. Eftir að hafa aðstoðað einn nemanda getur sá nemandi útskýrt fyrir samnemendum með sömu spurningu. Þegar nemendur eru að spyrja samnemendur er hægt að nota verkfærið Spurðu þrjá samnemendur. Það byggist einfaldlega á að nemendur biðji þrjá samnemendur um aðstoð áður en þeir spyrja kennarann, eftir að hafa reynt sjálfir. Með því að spyrja þrjá samnemendur læra nemendur að taka meiri ábyrgð á eigin námi og verða ekki jafn háðir kennaranum og áður (Slavin og Madden, 2010, bls. 21).

Rannsóknir hafa sýnt að flestir nemendur í stærðfræðitímum í vestrænum ríkjum fái verkefni þar sem krafist er annað hvort utanbókarlærdóms á reglu eða aðferð til að leysa dæmið (Tekkumru Kisa og Stein, 2015). Nemendur þurfa einnig að fá verkefni og tíma til að leysa verkefni sem krefjast meiri umhugsunar um efnið og krefst þess að þeir leiði út niðurstöður sjálfir. Samkvæmt Schoenfeld o.fl. (2019) læra nemendur best þegar þeir fá að spreyta sig á miðlungs til mikið krefjandi verkefnum sem bjóða upp á möguleika og stuðning við að bæta sig. Til að efla námið og auka vitsmunalegar kröfur í náminu ættu svör að vera rökstudd og nemendur beðnir um að útskýra hugsanagang sinn (Schoenfeld o.fl., 2019). Ef nemendur eru ekki vanir verkefnum sem reyna á rökstuðning og eigin útleiðslu getur verið auðvelt að falla í þá gryfju að gefa nemendum of einföld verkefni vegna þess að þeim finnst erfitt að útskýra eigin hugsun. Ef verkefnið er of einfalt læra nemendur ekki á þeim og þeim fer að leiðast. Verkefnin geta líka auðveldlega orðið of erfið. Þannig verkefni eru of ótengd því sem nemendur þekkja fyrir og geta því ekki myndað nein tengsl við. Ef verkefnið er of erfitt skilja nemendur ekki, komast ekkert áfram, fer að leiðast því þeir eru ekkert að gera og verða pirraðir. Sálfræðingurinn Mihály Csíkszentmihályi (1990) kallar það flæði þegar þessu fullkomna erfiðleikastigi, þar sem verkefnið er hvorki of erfitt né of auðvelt, er náð. Csíkszentmihályi hafði verið að rannsaka hugtak sem hann kallaði ákjósanlegasta reynsla (e. optimal experience). Ákjósanlegasta reynsla er það ástand þar sem maður er það upptekinn í verkefni að ekkert annað skiptir máli þá stundina. Flæði er orðið sem Csíkszentimihályi notar til að ná utan um kjarnann í ákjósanlegustu reynslu. Liljedahl (2020) lýsir flæði myndrænt með mynd 2.1. Þegar nemandi leysir verkefni eykst hæfni hans og til að halda honum í flæði þarf að auka áskorun. Þá heldur hæfni nemandans áfram að aukast og þar af leiðandi þarf að halda áfram að auka áskorun verkefna (Liljedahl, 2020). Þó það hljómi eðlilega að auka áskorun þegar hæfni eykst, þá bendir Liljedahl á mikilvægi tímasetningar þegar kemur að flæði. Ef áskorun í verkefni eykst áður en nemandi hefur náð hæfni lendir hann í pirring. Á sama hátt, ef beðið er of lengi með að auka áskorun lendir nemandinn í leiða. Þar sem nemendur ná hæfni á ólíkum tímum þarf að aðlaga áskorunina þannig að hún sé aukin á réttum tíma fyrir hvern nemanda. Þar sem erfitt er að aðlaga tímasetningar að hverjum nemanda í stórum hóp, mælir Liljedahl með hugsandi skólastofu. Því í hugsandi skólastofu eru nemendur að vinna í ólíkum hópum og á lóðréttum flötum svo auðveldara er fyrir kennara að fylgjast með hvar nemendur standa hverju sinni (Liljedahl, 2020). Nánar er fjallað um hugsandi skólastofu í kafla 2.5.4. Það er áskorun að finna verkefni sem bjóða nemendum upp á merkingarbæra möguleika til náms sem styðja við uppbyggingu þeirra í námi og gefa þeim möguleika á að byggja á fyrri þekkingu og útvíkka þannig skilning þeirra. En það verður auðveldara með æfingunni (Schoenfeld, 2015).

Mynd 2.1: Flæði



Myndin lýsir með grafi hvernig flæði tengist áskorun og hæfni. Myndin er úr bók (Liljedahl, 2020 bls 148) og þýdd af höfundi ritgerðar.

2.5.3. Einstaklingsmiðun

Einstaklingmiðun byggir ekki bara á að allir geti nálgast sömu upplýsingar. Einstaklingsmiðun byggist á því hvort allir nemendur fái að taka jafnan þátt í náminu, hvernig nemendur eru virkjaðir í kennslustundum og hvort þeir geti falið sig í kennslustund til að forðast að taka þátt (Schoenfeld og the Teaching for Robust Understanding Project, 2016). Oft eru fáir nemendur sem fá mesta athygli kennarans, hvort sem það er til að fá aðstoð eða til að svara spurningum kennarans. Ef sömu fáu nemendurnir fá meiri athygli í tímum en aðrir er aðgengi að efni ekki jafnt. Allir nemendur þurfa að fá að taka þátt og koma með eigið framlag til að námið sé einstaklingsmiðað (Schoenfeld o.fl., 2019).

Hægt er að einstaklingsmiða nám með því að benda nemendum á aðra staði en kennslubókina til að afla sér upplýsinga. Þannig geta nemendur sem eiga erfitt með að skilja þegar þeir lesa texta úr bók fengið aðgengi að myndböndum eða bókum sem eru öðruvísi upp byggðar en kennslubókin þeirra. Einnig er hægt að einstaklingsmiða nám með því að leyfa nemendum að skila verkefnum frá sér á ólíka vegu. Nemendur eru ólíkir, sumir koma efni best frá sér á blaði, sumir koma efni best frá sér með því að segja frá og aðrir myndrænt. Það að leyfa nemendum stundum að skila verkefnum á því formi sem þeir kjósa hjálpar nemendum að nálgast efnið út frá eigin forsendum (Tomlinson, 2014, bls. 144).

2.5.4. Skuldbinding, áræðni og sjálfsmynd

Sjálfsuppbygging nemenda byggist á því að þeir hafi möguleika á að útskýra sínar eigin hugmyndir og hvernig og hvort þeir fái að koma með innlegg inn í umræðuna (Schoenfeld og the Teaching for Robust Understanding Project, 2016). Ekki er nóg að fá að koma með innlegg í umræðuna. Einnig þarf að passa upp á að hugmyndir nemenda séu ræddar, skoðaðar og viðurkenndar (Schoenfeld o.fl., 2018). Algengt er að fólk segi setningar á borð við „ég er ekki stærðfræðimanneskja“ eða „stærðfræði er ekki mitt fag“. Þá hefur fólk myndað sína stærðfræðilegu sjálfsmynd í kringum það að vera ekki gott í stærðfræði og ætlar sér ekki að breyta þeirri skoðun. Til að byggja upp stærðfræðing innan með nemanda þarf hann að hafa vilja til að taka þátt í náminu með því að hjálpa honum að átta sig á því að hann geti náð árangri í dæmum og treyst niðurstöðum sínum. Markmið hér er að nemandi geti í staðinn fyrir að hafa lært reglur utanbókar sagt við sjálfan sig að hann hafi farið skref fyrir skref í gegnum verkefni með rökstuðningi og er sannfærður um að niðurstöður séu réttar (Schoenfeld, 2015).

Það getur verið erfitt að fá nemanda sem er búinn að ákveða að hann sé lélegur í stærðfræði til að reyna við verkefni. Dæmi um þannig nemanda getur verið nemandi sem gekk ekki nægilega vel að skilja efni fyrri annar og kemur í skólann veturinn eftir búinn að ákveða að stærðfræði sé ekki hans fag og hann muni aldrei skilja neitt. Þessir nemendur hafa misst allt sjálfstraust í stærðfræði og það þarf að vinna með nemandanum í því að hjálpa honum að finna tengsl við fyrri þekkingu og byggja upp sjálfstraust í útreikningum. Nokkrar leiðir fyrir kennara til að hjálpa eru að fá nemendur í til að vinna saman í litlum hópum, hjálpa nemendum sem eru í erfiðleikum að byggja á fyrri vitneskju og finna þeirra styrkleika í faginu og að fá nemendur til að umorða eða útskýra niðurstöður annarra nemenda (Schoenfeld, 2015). Oft hjálpa hugmyndir samnemenda meira upp á skilning en útskýringar kennara því samnemendur tala sama mál og koma að efninu með sömu forsendum. Í hugmyndum Peter Liljendahls um hugsandi skólastofu (Liljedahl, 2017; Gíslason og Kristinsdóttir, 2018) er mælt með að nemendur leysi dæmi í fámennum hópum uppi við töflu eða aðra auðútstrokanlega lóðrétta fleti. Vinna hópsins verður þannig sýnileg öllum hópameðlimum og kennaranum. Mælingar hafa sýnt að nemendur séu viljugri að byrja að skrifa þegar það er á útstrokanlega töflu en á pappír. Þegar tíminn til að leysa verkefnið er liðinn geta allir skoðað niðurstöður hinna og kennarinn biður nemendur um að útskýra hugsunargang hóps sem þeir voru ekki í (Jacobs o.fl., 1997). Með þessari tegund af hópavinnu verða nemendur að vinna saman og erfitt er að reyna að fela sig. Einnig er auðvelt fyrir kennarann að taka eftir ef einhver er ekki að taka þátt og hvatt þann nemanda til þátttöku.

2.5.5. Leiðsagnarmat

Leiðasagnarmat er námsmat þar sem markmiðið er að efla nám nemenda. Markmiðið með námsmatinu er því ekki einungis að meta getu nemenda, eins og sumar tegundir námsmats byggjast á. Það sem greinir leiðsagnarmat frá öðru námsmiðuðu námsmati er að niðurstöður námsmats eru notaðar til að aðlaga kennsluna að nemendunum (Black o.fl., 2004). Leiðsagnarmat byggir á því hvernig umsagnir og leiðsagnir nemandinn fær og hvort þær hjálpi nemandanum að hugsa dýpra (Schoenfeld og the Teaching for Robust Understanding Project, 2016). Nemendur geta ekki meðtekið nýjar hugmyndir eins og þær eru kenndar. Nemendur þurfa að fá tækifæri til að tengja nýjar hugmyndir við aðrar sem þeir kannast nú þegar við (Black og Harrison, 2010). Þegar leiðsagnarmat er notað er gott fyrir kennarann að vita hvernig og hvað hver nemandi skilur í stærðfræði til að geta hjálpað hverjum og einum að byggja upp þann skilning (Schoenfeld, 2015).

Einfaldasta tegund mats er að kennari skilar verkefni nemanda til baka merkt rétt eða rangt. Þó það gefi einhverja yfirsýn um hvað nemandinn kann og hvað hann kann ekki hvetur það nemandann ekki til umhugsunar og sjálfsmats. Markmið náms hjá flestum skólum er að hjálpa nemendum að vaxa og þroska sem námsmenn, auka þekkingu sína og verða óháðir kennurum sínum til að afla sér áfram þekkingar út lífið (Sadler, 1998). Það að nemendur séu háðir kennaranum til að finna út úr því hvort svar sé rétt eða rangt hjálpar þeim ekki við það. Sjálfsmat og eftirlit með eigin námi þarf að vera hluti námsins til að námsmenn nái þeim þroska. Þetta sjálfsmat og eftirlit er einmitt eitt af því sem leiðsagnarmat byggir á (Sadler, 1998).

Rannsóknir hafa sýnt að það að gefa umsögn án einkunnar eða einkunnarorða bætir getu nemenda meira en umsögn með einkunn eða bara einkunn. Butler (1988) sýndi að það að einblína á einkunnir gat haft meiri slæm en góð áhrif. Rannsóknir á námsmati sem byggist einungis á einkunnum hafa sýnt að það sé ekki hvetjandi námsmat og í sumum tilfellum versnaði frammistaðan við þannig námsmat (Kluger og DeNisi, 1996). Þegar einkunnir eru það eina sem skiptir máli fara nemendur að bera sig saman við aðra, forðast að taka áhættu og bregðast illa við nýjum áskorunum út af möguleikanum á því að mistakast sem gæti eyðilagt sjálfstraust þeirra (Black og Harrison, 2010).

Nokkrir hlutir standa upp úr þegar leiðsagnarmat er skoðað, það eru

- mikilvægt að efla endurgjöf, bæði nemenda á milli og frá kennara til nemenda
- nýta þarf niðurstöður námsmats til að aðlaga kennslu og nám
- nemendur þurfa að vera virkir þátttakendur í eigin námi

- beina athygli að því hvernig námsmat getur haft áhrif á áræðni og sjálfsmynd nemenda og kosti við að virkja nemendur með sjálfs- og jafningjamati (Black og Harrison, 2010).

Mikilvægt er þegar kemur að leiðsagnarmati að kennarar búi til námsumhverfi þar sem þeir geti hlustað á samræður nemenda þannig að þeir geti nýtt sér upplýsingarnar sem þeir fá til að taka kennslufræðilegar ákvarðanir um næstu skref (Black og Harrison, 2010).

Tafla 2.1: Spurningar úr TRU rammanum

	Spurningar
Efnistök	Hvert er markmið kennslustundarinnar? Hvernig tengist efnið því sem nemendur vita nú þegar?
Vitsmunalegar kröfur	Hversu langan tíma fá nemendur til að hugsa á meðan kennslustund stendur? Hvað gerist ef nemendur eru fastir? Fá nemendur tækifæri til að greina frá sinni lausnarleið og útskýra hugsunina sem þar liggur að baki?
Einstaklingsmiðun	Fær hver og einn nemandi að taka þátt? Getur einhver nemandi komist hjá því að taka þátt?
Skuldbinding, áræðni og sjálfsmynd	Fá nemendur að ræða hugmyndir sínar? Er unnið áfram með svör nemenda?
Leiðsagnarmat	Er brugðist við svörum nemenda með það í huga að hjálpa þeim að dýpka skilning?

Spurningar tengdar TRU rammanum fyrir kennara til að velta fyrir sér þegar kennslustund er skipulögð. Taflan var unnin upp úr grein Schoenfelds og félaga frá 2019 (Schoenfeld o.fl., 2019).

Verkefnið hér á eftir var búið til með TRU rammann í huga og rökstutt út frá honum. Tafla 2.1 verður notuð til að hliðsjónar. TRU ramminn var valinn út af því að hugmyndirnar í honum um að gera nemendur að stærðfræðilegum hugsuðum, dýpka skilning þeirra og að fá nemendur til að ræða hugmyndir sínar voru markmið með verkefninu.

3. Aðferðafræði

Markmið rannsóknarinnar var að finna út úr því hvort verkefnið væri á réttu erfiðleikastigi fyrir framhaldsskólanemendur í stærðfræðiáfanga á þriðja þrepi og hvort endurskoða þyrfti einstaka spurningar eða tegundir spurninga. Upphaflega var markmiðið að gera athuganirnar á öllum þremur verkefnunum og ræða við nemendur sem tóku verkefnið og sem tóku ekki verkefnið um skilning þeirra á diffrun. Sú rannsókn verður að bíða betri tíma því Covid-19 setti strik í reikninginn. Hópavinnu í verkefnum þurfti að takmarka út af fjarlægðarreglum og yfirferð námsefnis gekk hægar í fjarkennslu og því voru kennarar ekki jafn tilbúnir til að verja tíma í verkefnið og æskilegt hefði verið. Rannsóknina þurfti því að takmarka við að skoða eitt af verkefnunum þremur og ræða við nemendur um verkefnið.

Rannsóknarspurningarnar voru:

1. Er verkefnið hæfilega krefjandi fyrir nemendur í framhaldsskólaáfanga í stærðfræði á þriðja þrepi?

2. Hver eru viðhorf nemenda gagvart diffrun eftir verkefnið?

3.1. Rannsóknaraðferð

Rannsóknaraðferðir skiptast í megindlegar og eigindlegar aðferðir. Í megindlegum aðferðum er unnið með tilraunir og fundnar tölur sem segja til um hvort rannsóknartilgáta standist. Aftur á móti byggja eigindlegar aðferðir á upplifun einstaklinga og krefjast þess að rýnt sé dýpra í svör og upplifanir einstaklinga (Sigurlína Davíðsdóttir, 2013). Þar sem þessi rannsókn fjallar um upplifun nemenda af verkefni og svörum þeirra byggir hún á hugmyndum eigindlegrar aðferðafræði.

Tilviksrannsókn (e. case study) tilheyrir eigindlegri aðferðafræði og er oft skilgreind sem ítarleg rannsókn á einni eða fáum einingum, kallaðar tilvik, til þess að skilja stærri flokk sambærilegra eininga. (Gerring, 2009) Markmið tilviksrannsókna er að auka skilning á raunverulegum aðstæðum (Tellis, 1997) og í rannsókninni hér er verið að auka skilning á viðhorfi nemenda gagnvart diffrun og verkefna í diffrun.

Rannsóknin tilheyrir því undirflokknum tilviksrannsókn.

3.2. Val á þátttakendum

Sjálfboðaliðaúrtak einkennist af því að þátttakendur bjóði sig fram í þátttöku (Katrín Blöndal og Sigríður Halldórsdóttir, 2013). Verkefnið var auglýst munnlega fyrir fjórum kennurum, sem allir voru að kenna framhaldsskóla nemendum í stærðfræðiáfanga á þriðja þrepi og komnir á þann stað í námsefninu að stutt væri í að nemendur færu að læra diffrun. Einn kennaranna bauð nemendur sína fram ásamt kennslustundum undir verkefnið. Þar sem kennarinn bauð sinn hóp fram í að taka þátt í verkefninu voru þátttakendur valdir með sjálfboðaliðaúrtaki.

Verkefnið var prófað vorið 2021 á sextán nemendum á eðlisfræðibraut í íslenskum framhaldsskóla. Allir nemendurnir voru á átjánda eða nítjánda aldursári og með frekar góðan grunn í stærðfræði. Nemendurnir voru allir saman í stærðfræðiáfanga á þriðja þrepi samkvæmt Aðalnámskrá framhaldsskóla (Mennta- og menningamálaráðuneytið, 2011). Kennararnir sem rætt var við um að fá að leggja verkefnið fyrir nemendur þeirra voru valdir þar sem nemendurnir voru komnir á góðan stað í námsefninu miðað við verkefnið. Kennarinn sem bauð sig fram hafði áhuga á að leyfa nemendum sínum að prófa verkefnið og bauð þau því fram. Nemendurnir voru allir búnir að læra um föll, halla falls, línuföll og markgildi en voru ekki byrjaðir að diffra. Í hópnum voru fjórar stelpur og tólf strákar.

3.3. Aðferð við fyrirlögn verkefna (gagnaöflun)

Nemendunum var skipt í sjö hópa. Verkefni 1 var lagt fyrir alla hópana og höfðu þeir tvær 40 mínútna kennslustundir til að leysa verkefnið. Á meðan á kennslustundinni stóð voru nemendur beðnir um að láta vita ef einhverjar spurningar væru óskýrar og ef þeir hefðu einhverjar athugasemdir varðandi verkefnin. Ef spurningarnar voru óljósar var hópurinn beðinn um að umorða spurninguna eftir að hafa fengið nánari útskýringu á hvað var verið að biðja um. Punktað var niður hvernig hóparnir voru að vinna og hvort þeir væru með spurningar. Hóparnir skrifuðu svör sín við verkefnunum á blöð sem safnað var saman eftir kennslustundirnar. Einnig var rætt við hvern og einn hóp um verkefnið eftir að hafa skilað því. Eftir kennslustundirnar var lausnum allra hópanna safnað saman ásamt punktum sem skrifaðir voru samhliða því að rætt var við nemendur.

3.4. Gagnagreining

Svör hópanna við spurningum verkefnisins voru vélritaðar til að auðvelda úrvinnslu. Gögnunum var eytt eftir úrvinnslu. Svör hvers hóps voru skoðuð í heild sinni. Verið var að leita eftir hvort svörin væru í samræmi við önnur svör í verkefnunum, hvernig stærðfræðilegi texti hópsins var uppsettur og hvort svörin gæfu til kynna að verkefnið væri of létt eða of erfitt. Einnig voru svör hverrar spurningar skoðaðar hjá öllum hópum samtímis. Þar var verið að greina hverja spurningu fyrir sig. Ef allir hópar koma með óljós svör eða svör þar sem niðurstaðan er röng og útskýringar vanta er spurningin líklega óljós eða of erfið. Ef allir hópar koma með stutt rétt svar getur verið að spurningin fái ekki nemendur til að velta svarinu fyrir sér og gæti því verið of auðveld. Spurningar hópa sem fengust ef þeir skildu ekki einhverja spurningu voru einnig notaðar til að umorða óljósar spurningar.

Punktar um hvernig nemendurnir unnu í kennslustundum samanstóðu af því á hvaða spurningu nemendur voru við ákveðna tímapunkta, hvenær þeir kláruðu verkefnið og hvort þeir voru með athyglina við verkefnið eða voru að gera eitthvað annað. Þessir punktar voru notaðir til að athuga hvort verkefnið væri af hæfilegri lengd fyrir gefinn tímaramma. Punktarnir um munnlegar athugasemdir nemenda eftir verkefnið voru notaðir til að skoða áhuga nemenda eftir verkefnið og til að bæta það.

3.5. Siðferðileg atriði

Þar sem rannsókn var gerð á nemendum þurfti að hafa ýmis siðferðileg atriði í huga. Nemendurnir skrifuðu allir undir samþykki að taka þátt í verkefninu og að svör þeirra væru rannsökuð og nýttar í frekari þróun á verkefninu. Einnig var nemendum kynnt að svör þeirra væru nafnlaus og órekjanleg. Samkvæmt Persónuvernd þurfti ekki að tilkynna verkefnið til þeirra því upplýst samþykki fékkst og ekki var verið að vinna með neinar persónuupplýsingar sem teljast viðkvæmar í skilningi 3. töluliðs 1. málsgreinar í 3. grein laga um persónuvernd og vinnslu persónuupplýsinga (nr. 90/2018).

3.6. Takmarkanir rannsóknarinnar

Rannsóknin hefur ýmsar takmarkanir. Nefnt var fyrr í kaflanum að rannsóknin var smærri í sniðum en ákjósanlegt hefði verið því Covid-19 setti strik í reikninginn. Bæði var úrtakið smærra og einsleitara en æskilegt hefði verið og ekki gafst tími til að leggja öll þrjú verkefnin ásamt úrvinnsluverkefnum fyrir nemendur. Takmarkanir af völdum smæðar og einsleitni úrtaksins eru þær að ekki er víst að yfirfæra megi niðurstöður á alla framhaldsskóla landsins. Þar sem framhaldsskólanemendur á eðlisfræðibraut geta gefið aðrar niðurstöður en framhaldsskólanemendur á öðrum brautum.

Annað atriði sem getur haft áhrif á rannsóknina er að verkefnið sem lagt var fyrir nemendur hafði engin áhrif á einkunnir nemenda. Það getur haft áhrif á hversu mikið nemendur lögðu sig fram við verkefnið. Sumir gætu hafa lagt meira á sig því minni kvíði fylgir verkefni sem hefur engin áhrif á einkunnir og aðrir geta hafa lagt minna á sig því verkefnið skipti ekki máli þegar kom að einkunnum. Enn aðrir gætu hafa lagt jafnmikið á sig og þeir gera í öðrum verkefnum.

4. Niðurstöður

4.1. Hvernig verkefnin breyttust á rannsóknartímanum og af hverju

Í upphafi átti verkefnið að vera samansafn af mörgum litlum verkefnum í diffrun. Verkefnin áttu að vera dæmi tengd raunheiminum sem væru uppbyggð þannig að nemendur þyrftu að verja tíma í það að velta þeim fyrir sér. Snemma í ferlinu kom í ljós að betra væri að búa til færri stór verkefni en fleiri lítil verkefni. Í stóru verkefnunum var hægt að kafa dýpra ofan í hvern hluta verkefnisins og skoða hugsanagang nemenda í hverju skrefi. Stóru verkefnin urðu þrjú og hverju þeirra fylgir úrvinnsluverkefni. Aðeins gafst tækifæri til að leggja fyrir verkefni 1 og því verður hér aðallega rætt um hvernig verkefni 1 breyttist eftir að hafa verið lagt fyrir nemendur.

Spurning 1 hljóðar svo: „Skoðaðu grafið.Veltu því fyrir þér hvað það segir þér um æfingu Nonna. Skrifaðu lýsingu á æfingunni. Það má vera saga um æfinguna hans Nonna eða lýsingar á því hvað hann hefur getað verið að gera á hverri stundu á æfingunni sem myndi valda breytingu á púlsinum eins og á grafinu.“ Þeirri spurningu var bætt við í fyrri hluta verkefnisins eftir á. Eftir að hafa grafið dýpra í svör nemenda kom í ljós að það væri gott að fá nemendur til að hugsa aðeins dýpra um hvað væri að gerast í raunveruleikanum, ekki bara hvað grafið er að segja þeim.

Þegar verkefnið var lagt fyrir nemendur áttu þeir í heildina að teikna 14 línur á grafið, sem voru sniðlar gegnum ólíka punkta á grafinu. Í ljós kom að það var of mikið af línum og það væri hægt að ná fram sama skilningi með færri línum. Þá kom upp hugmyndin að skoða verkefnið í Geogebru ef einhverjir þyrftu að skoða fleiri línur en teiknaðar eru í verkefninu. Í verkefninu eins og það er hér eru nemendur aðeins látnir teikna fjórar línur. Í stað hinna línanna eru nemendurnir beðnir um að velta því fyrir sér hvernig línurnar breytast þegar línan fer í gegnum punktinn (20,f(20)) og annan punkt sem nálgast hann. Einnig eru nemendur beðnir um að skoða verkefnið í Geogebru, sem var ekki áður hluti af verkefninu.

Í spurningu 8 í seinni hluta verkefnis 1 er beðið um að lýsa því hvernig hægt er að finna hallatölu snertils við fall í punkti. Bætt var við spurninguna að lýsingin eigi að geta staðið ein og sér óháð öðrum svörum í verkefninu, því lýsingar nemendanna gátu það almennt ekki.

Þar sem tilfinningin eftir að hafa lagt fyrir verkefnin var sú að ekki væri unnið nægilega mikið með svör nemenda, var úrvinnsluverkefnum bætt við öll verkefnin þrjú. Einnig var matskvarða bætt við því nemendur höfðu orð á því að þeir voru ekki vissir um hversu ítarleg svör þeirra ættu að vera.

4.2. Áætlun um fyrirlögn verkefnis og breytingar á þeirri áætlun

Ljóst varð áður en verkefnið var lagt fyrir nemendur að aðeins væri hægt að leggja fyrir eitt af verkefnunum. Því var áætlun um fyrirlögn verkefnis gerð með það í huga að aðeins verkefni 1 væri lagt fyrir nemendurna. Áætlunin var sú að verkefnið yrði lagt fyrir af rannsakanda fyrir nemendur sem rannsakandi þekkti ekki. Nemendunum væri skipt í tveggja til þriggja manna hópa og síðan væri verkefninu dreift til þeirra á blaði. Allir hóparnir fengju eitt eintak af verkefninu en eins mörg ljósrit af grafinu og þeir óskuðu eftir. Þannig gæti hver og einn í hópnum teiknað inn á eigið graf og myndað eigin hugmyndir út frá grafinu. Í lok verkefnisins yrðu hóparnir beðnir um skoðanir á verkefninu og rætt við þá um diffrun og tengingar verkefnisins við diffrun.

Áætlunin stóðst að mestu leyti. Það sem breyttist var að hóparnir voru myndaðir af þeim sem sátu hlið við hlið. Þannig væru nemendur sem sætu hver langt frá öðrum ekki að auka líkur á Covid-19 smiti sín á milli. Annað sem breyttist var það að hóparnir voru spurðir hvort þeir hefðu áhuga á að ræða um diffrun og hvernig verkefnið tengdist diffrun.

4.3. Almennt um úrlausnir og vinnubrögð nemendanna

Svör nemenda við spurningunum voru almennt góð en oft var tungumáli stærðfræðinnar ekki rétt beitt í svörunum. Þar má nefna svör á borð við

- „Línan fer upp“ þegar átt var við að hallatala línunnar sé stærri en núll eða að línufallið sé vaxandi.

- „Hallatalan er fasti“ þegar átt var við að línan væri lárétt. Það er satt að hallatalan sé fasti, en það er ekki það sem nemendurnir voru að reyna að koma frá sér.

- „Ferillinn færist ofar í grafinu“ þegar átt var við að fallið væri vaxandi.

- „Línurnar hafa upphafspunkt $f(x)$ og endapunkt $f(x)$“ þegar átt var við að báðar línurnar hefðu tvo skurðpunkta við fallið f.

Hóparnir höfðu í upphafi verkefnisins verið beðnir um að láta vita ef spurningar væru óljósar. Ef hópur spurði, þá var spurningin útskýrð fyrir þeim og hópurinn beðinn um að koma með hugmynd um umorðun sem myndi gera spurninguna skýrari fyrir þeim. Aðeins einu sinni spurðu tveir hópar um sömu spurningu og spurningar voru almennt fáar. Einn hópur af sjö tók verkefninu ekki nægilega alvarlega og var að flýta sér heim frekar en að gera verkefnið almennilega. Það var ljóst bæði við það að hlusta á umræður hópanna, þar sem sá hópur var aðallega að tala um að komast heim sem fyrst, og við að skoða svör þeirra sem voru oft einfaldlega „veit ekki“.

4.4. Um úrlausnir og vinnubrögð nemenda við fyrirlögn fyrri hluta verkefnisins

Í fyrri hluta verkefnisins vissu allir hóparnir hvenær hjartsláttur Nonna var að verða hraðari og hægari. Útskýringarnar byggðust flestar á að „ferillinn væri að fara upp og niður“ eða „y-gildi er að stækka og minnka“. Enginn hópur notaði orðin vaxandi og minnkandi. Það kom á óvart og verður nánar skoðað í kafla 5 Umræður.

Munurinn á línu sem liggur um $(10, f(10))$ og $(20, f(20))$ annars vegar og $(15, f(15))$ og $(20, f(20))$ hins vegar var skýr fyrir nemendunum en svör þeirra voru að önnur væri brattari en hin (2 hópar), önnur væri meira vaxandi en hin (1 hópur) eða að hallatölur væru ólíkar (4 hópar). Hér er ljóst hvað nemendurnir eru að reyna að segja en aftur kemur í ljós að það vantar upp á hæfni þeirra í því að skrifa stærðfræðilegan texta.

Þegar nemendur voru spurðir um útlit snertilsins við fallið í punktinum $(20, f(20))$ voru tveir hópar sem teiknuðu línuna á grafið og skrifuðu ekkert. Einn hópur sagði einungis að línan væri vaxandi. Hinir hóparnir fjórir komu með svör sem verða hér skoðuð nánar. Einn hópur sagði að það væri ekki hægt að teikna línuna þó þeir hefðu reynt. Þar hefði verið áhugavert að fá að heyra hvernig þeir hefðu reynt að teikna línuna og rök þeirra fyrir því að það væri ekki hægt að teikna hana. Flest svör frá hópnum voru áhugaverð og velútpæld svo það að grafa dýpra í þeirra hugsunarhátt hefði getað hjálpað þeim að finna snertilinn. Í kennsluleiðbeiningunum er gert ráð fyrir að tími sé gefinn í lok hvers tíma til að ræða svör nemenda. Þetta er dæmi um svar sem gott er að ræða í opinni umræðu með öllum hópunum. Þrír hópar teiknuðu snertilinn og skrifuðu lýsingu. Lýsingarnar voru eftirfarandi

- Línan er sú sama og allar aðrar línur merktar á grafið.
- Línan er líklegast alveg samsíða ferlinum.
- Línan er óeðlilega lík fallinu $f(x)$.

Fyrsta svar nemenda hér að ofan lýsir ekki snertlinum en svarið hafði mikil áhrif á þá ákvörðun að fækka línum sem átti að teikna inn á grafið. Það er eðlilegt að hópur segir að línan sé sú sama og allar aðrar línur þegar hann er búinn að teikna margar línur sem erfitt er að greina á milli. Samt sem áður var ánægjulegt að sjá að hópurinn skildi hvernig línan liti út og að hana væri ekki ómögulegt að finna. Þetta svar hafði einnig áhrif á ákvörðunina um að bæta við Geogebru hluta í verkefnið. Annað svar nemenda hér að ofan og það þriðja eru dæmi um svör þar sem stærðfræðilegt orðalag mætti bæta en skilningur er til staðar. Hvorugur hópurinn nefnir punktinn $(20, f(20))$ sem myndi gefa meiri upplýsingar um útlit snertilsins. Með því að gefa nemendum tækifæri til að útskýra nánar fyrir samnemendum sínum væri hægt að bæta orðalagið í svörunum þannig að það væri í áttina að „Halli línunnar er sá sami og halli ferilsins í punktinum $(20, f(20))$ og línan sker ferilinn í punktinum $(20, f(20))$." Það væri hægt að bæta svarið enn meira með því að fá hópana til að ræða saman um hvað mætti bæta við í lýsingunni.

Lítið er um rökstuðning í fjölvalsspurningunum en einn hópur rökstuddi hvort hjartsláttur Nonna væri að verða hraðari, hægari eða óbreyttur með $\lim_{x\to 20-} f(x) < \lim_{x\to 20+} f(x)$. Þó sú fullyrðing sé ósönn því fallið er samfellt í grennd við $x = 20$ og því er $\lim_{x\to 20-} f(x) = \lim_{x\to 20} f(x) = \lim_{x\to 20+} f(x)$ þá var svarið áhugavert og sýndi að nemendurnir voru að tengja verkefnið við markgildi. Einnig er nokkuð ljóst að hópurinn var að reyna að segja að fallið sé vaxandi í grennd við $x = 20$. Sá hópur sem kom með þetta svar er sá sami og sagði að snertillinn við fallið í $(20, f(20))$ væri ekki til. Þar sem enginn annar hópur kom með sömu svör og þessi væri tilvalið að fá þennan hóp til að útskýra sinn hugsunargang fyrir bekknum. Hægt væri að benda þeim á að markgildið er það sama frá hægri og vinstri og sjá hvernig það hefði áhrif á röksemdarfærslu þeirra.

Í lokaspurningu fyrri hlutans er spurt hvort hjartslátturinn aukist einhvern tímann um meira en 10 slög á mínútu. Beðið var um rökstuðning en lítið fékkst. Spurningin var umorðuð eftir að verkefnið hafði verið lagt fyrir nemendur til að leggja áherslu á rökstuðning í svarinu. Allir hóparnir sögðu að Nonni þyrfti að hægja á sér. Nákvæmlega hvenær var í kringum 35 hjá öllum hópum en þar sem þeir þurftu að lesa af grafi var sú tala örlítið breytileg. Tveir hópar rökstyðja val sitt. Annar þeirra segir að hallatalan er stærri en 1 á bilinu 35 mínútur til 38 mínútur. Grafið er skalað þannig að hlutfallið milli x-ás og y-ás er 1 : 10 sem útskýrir af hverju hópurinn sagði að hallatalan væri stærri en 1 ekki stærri en 10. Með því að spyrja hópinn út í þetta svar í umræðu með öllum hópunum væri líklega hægt að fá leiðréttingu á hallatölunni, sér í lagi því þeir túlkuðu hallatöluna 1 sem 10 slög á mínútu á mínútu. Hinn hópurinn sem rökstuddi valið sitt sagði að hjartslátturinn færi á tímabilinu 35-38 mínútur upp um 13,3 slög á mínútu. Þar vantar að hjartslátturinn fer upp um 13,3 slög á mínútu á mínútu en ljóst er að hópurinn skildi að hallatala línu um $(35, f(35))$ og $(38, f(38))$ gæfi þeim aukningu í hjartsláttum á mínútu. Einn af hópunum sagði að Nonni þyrfti að hægja á sér í $t = 17$ til $t = 23$ og einnig frá $t = 34$ til $t = 38$. Þar hefði verið gott að fá rökstuðning á bilinu $17 - 23$ mínútur. Með því að skoða ferilinn á útprentaðri mynd er ekki hægt að útiloka að á milli 19. og 21. mínútu væri hjartsláttur á mínútu að aukast hraðar en 10 slög á mínútu á mínútu þó það sé tæpt. En þar fyrir utan er grafið nokkuð skýrt hvað það varðar.

4.5. Um úrlausnir og vinnubrögð nemenda við fyrirlögn seinni hluta verkefnisins

Í seinni hluta verkefnisins eru nemendur beðnir um hallatölu snertils í topppunkti. Þar eru 5 hópar sem segja að hallatalan sé 0, einn hópur sem segir að hallatalan sé um það bil 0 og einn hópur sem segist ekki vita hvað snertill sé. Þeir 6 hópar sem svöruðu spurningunni fundu allir tvo punkta til viðbótar við þann sem var gefinn að hefði hallatöluna 0. Þar sem punktarnir eru lesnir af mynd eru ekki allir hópar með nákvæmlega sömu tölur en þeir eru með x-gildi á bilinu $24 - 25$ og á bilinu $31 - 31{,}5$. Enginn kom með fleiri mögulega punkta og enginn með færri. Einn hópur tekur sérstaklega fram að ástæðan fyrir því að þessir punktar urðu fyrir valinu væri sú að hallatala snertils skiptir um formerki í þeim punktum. Sá hópur sem svaraði að þeir vissu ekki hvað snertill var er sá sami og svaraði stórum hluta spurninganna með „veit ekki“. Þeir báðu ekki um aðstoð til að fá nánari útskýringu heldur slepptu því frekar að leysa verkefnið.

Hóparnir voru allir beðnir um í spurningu 8 að lýsa því fyrir vin hvernig þeir myndu finna hallatölu snertils í x_0. Markmiðið var að nemendur sem væru á sama stað í námsefninu og þeir sem tóku verkefnið gætu lesið lýsinguna og notað hana til að finna hallatölu snertils. Enginn af hópunum skilaði svari sem uppfyllti þau skilyrði. Svörin sem fengust voru eftirfarandi eða svipuð

- „Eins og í dæminu á undan“

- „Með $\dfrac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$“
- „Með hallatölu“

Orðalagi spurningarinnar var breytt til að ýta undir það að samnemandi ætti að geta fengið svarið í hendurnar og nýtt sér það til að finna hallatölu snertils við fall í x_0.

Í lok seinni hluta verkefnisins eru tvær spurningar sem báðar reyna á túlkun nemenda á hallatölu snertils. Þar áttu nemendur að taka það fram hvað það táknaði að hallatala snertils væri stærri en, minni en og jöfn núll ef grafið væri að lýsa hraða bíls í metrum á sekúndu annars vegar og hins vegar ef grafið táknaði virði fyrirtækis. Notað var h_x til að tákna hallatölu snertils við fallið f í punktinum $(x, f(x))$. Í dæminu um bílinn voru tveir hópar sem nefndu hröðun og einn þeirra nefndi hröðun í öllum liðum, en nefndi hraða ekkert. Sá hópur sagði að ef $h_x > 0$ væri hröðun jákvæð, ef $h_x < 0$ væri hröðun neikvæð og ef $h_x = 0$ væri hraðinn fasti og hröðun engin. Fimm hópar töluðu um breytingu á hraða. Túlkun hópanna á $h_x = 0$ kom á óvart því spurningarnar fyrr í verkefninu byggðu á útgildi og þá vissu sex hópar af sjö að hallatala snertils við fall í útgildum yrði 0. Samt sem áður, þegar spurt var hvað það táknaði að $h_x = 0$ sagði enginn hópur að bíllinn væri að fara úr því að hægja á sér yfir í að vera að gefa í eða öfugt. Sex hópar sögðu að bíllinn sé á jöfnum hraða þegar $h_x = 0$. Þó það sé satt að ef bíllinn er á jöfnum hraða væri hallatala snertilsins núll, þá er fallið á grafinu ekki fasti á neinu bili. Einu tilvikin á grafinu þar sem hallatala snertils við fallið væri núll eru þegar bíllinn er að fara frá því að vera að hægja á sér yfir í að vera að gefa í og öfugt. Svör nemenda þegar þeir voru spurðir um virði fyrirtækis þegar $h_x = 0$ gáfu svipaðar niðurstöður. Þar voru allir hóparnir með það á hreinu hvað það þýddi að hallatala snertilsins væri jákvæð og neikvæð en það að hallatala snertilsins væri núll táknaði hjá öllum hópum að virði fyrirtækisins héldist óbreytt.

5. Umræður

Svör nemenda við spurningunum úr verkefni 1 sýndu að þörf væri á því að vinna áfram með svörin. Hægt er að finna úrvinnsluverkefni fyrir hvert af verkefnunum í viðauka A. Allir hóparnir sýndu einhvern skilning en með umræðu hefði verið hægt að bæta þann skilning og vinna áfram það sem betur mætti fara. Með því að vinna áfram með svörin til að dýpka skilning er verið að gefa endurgjöf með leiðsagnamati, sem er einn af fimm áhrifaþáttum TRU-rammans. Svör nemendanna hefðu getað verið skýrari og nákvæmari. Með umræðu eftir vinnu hópanna gætu nemendurnir nýtt sér niðurstöður umræðanna til að bæta sig í að skrifa svör sín á skýran og greinargóðan hátt.

Svör nemenda við spurningunum í verkefninu voru oft stutt eða ónákvæm. Hóparnir hefðu haft gott af því að hafa matskvarða til að ljóst væri hvaða kröfur væru gerðar til þeirra í verkefninu. Matskvarðanum (sjá viðauka B) var bætt við eftir að nemendur voru látnir spreyta sig á verkefninu. Í þeim áhrifaþætti TRU-rammans sem kallast vitsmunalegar kröfur eru meðal annars gerðar kröfur um að nemendur útskýri eigin hugsun. Í ólíkum verkefnum geta verið ólíkar kröfur um hversu nákvæmlega þarf að útskýra eigin hugsun. Sérstaklega getur það verið óljóst fyrir nemendur hvernig þeir eiga að koma eigin hugsunum frá sér ef þeir hafa hingað til ekki þurft að rökstyðja eigin hugmyndir og hugsun. Matskvarðinn myndi hjálpa nemendum að vita hvaða kröfur eru gerðar til röksemdarfærslu þeirra í verkefninu.

Nemendurnir höfðu almennt ekki góð tök á stærðfræðilegu orðalagi, en það að skrifa stærðfræðilegan texta er hluti af þeim hæfniviðmiðum sem má finna í Aðalnámskrá framhaldsskóla (Mennta- og menningamálaráðuneytið, 2011) fyrir stærðfræðiáfanga á þriðja þrepi. Oft var þó hægt að lesa á milli línanna í svörunum hvað nemendurnir voru að reyna að segja. Í sumum tilvikum voru svörin óskýr, eins og „hjartslátturinn er svipaður“ sem svar við „hvað getur þú sagt um hjartslátt Nonna í þessum punktum?“. Spurningin er hluti af spurningu 7 í seinni hluta verkefnis 1. Ekki er gefið til kynna í svarinu svipaður hverju hjartslátturinn sé og orðið svipaður gefur ekki miklar stærðfræðilegar upplýsingar. Í öðrum tilvikum var orðalagið þannig að orð eins og „upp“ voru notuð í stað orðsins vaxandi. Það að nemendur hafi ekki nægilega hæfni í að skrifa stærðfræðilegan texta kemur einnig fram í niðurstöðum á könnunarprófi í fyrsta áfanga í háskóla, sem nefndar voru í kafla 2.1(Anna Helga Jónsdóttir o.fl., 2013).

Eins og nefnt var í niðurstöðum, var einn hópur sem lagði minni metnað í verkefnið en hinir hóparnir. Einhverjar útskýringar fylgdu fyrstu svörunum hjá þeim hópi en síðan fóru svörin að verða styttri eða ekki til staðar. Það að hópurinn hafi viljað komast heim sem fyrst og það hafi ýtt undir minni metnað, þá má velta því fyrir sér af hverju hinir hóparnir höfðu ekki sömu löngun til að komast fyrr heim. Þar sem umræddur hópur vildi ekki ræða nánar um verkefnið eftir að hafa leyst það, er erfitt að vita fyrir víst hvað það hafi verið við verkefnið sem hvatti hann ekki til að reyna sitt besta. Nokkur atriði sem voru skoðuð því þau gætu haft áhrif á áhugaleysi hópsins eru

- Verkefnið var of langt. Það gæti verið að hópurinn eigi erfitt með að sitja lengi eða að halda athygli á sama verkefni í lengri tíma.

- Verkefnið var of einsleitt. Þar sem í fyrri hluta verkefnisins átti að teikna marga sniðla og snertla gæti verið að nemendur verði þreyttir á því og hætta að nenna að leggja sig fram. Út af því var fækkað þeim tilvikum þar sem sniðlar eða snertlar voru teiknaðir.

- Verkefnið var of frábrugðið því sem hópurinn er vanur. Þar sem nemendur fengu engan matskvarða fyrir verkefnið gæti verið að þeir hafi ekki vitað hvaða kröfur væru gerðar til lausnanna. Matskvarði er núna hluti af verkefninu.

- Verkefnið vakti ekki áhuga hjá hópnum. Ef öll þrjú verkefnin hefðu verið tekin, hefði vonandi að minnsta kosti eitt þeirra vakið áhuga hjá hópnum.

- Kröfur til lausna voru ekki nægilega skýrar. Eins og áður hefur verið nefnt, var enginn matskvarði sem fylgdi verkefninu og því ekki víst að nemendurnir hafi skilið hvaða kröfur væru gerðar til eigin svara. Matskvarði er núna hluti af verkefninu, ekki einungis stutt munnleg lýsing.

Þar sem nemendurnir máttu hætta að taka þátt í verkefninu hvenær sem er, var ekki skylda að taka þátt í umræðunni eftir á. En þó svo að endanlegt svar fáist ekki hvers vegna hópurinn lagði ekki sama metnað í verkefnið og hinir, þá er gott að ígrunda hvað gæti hafa valdið því. Enda á samkvæmt TRU rammanum enginn nemandi að geta sleppt því að taka þátt eða geta falið sig í kennslustund.

Í spurningu 2 í fyrri hluta verkefnis 1 voru nemendur spurðir hvernig þeir gætu séð af grafinu að hjartsláttur Nonna sé að verða hraðari eða hægari. Þrátt fyrir að nemendurnir höfðu verið að vinna með hugtökin vaxandi og minnkandi nokkrum vikum fyrr, þá notaði enginn þau hugtök þegar spurningunni var svarað. Í staðinn voru notað að ferillinn væri að fara „upp og niður“ eða að „y-gildi væri að stækka“. Í spurningu 6 í fyrri hluta verkefnis 1 voru orðin vaxandi og minnkandi notuð og eftir það urðu þau algengari í svörum nemenda. Mögulega hefði þurft að rifja upp hugtökin í upphafi kennslustundarinnar, því nemendur fóru ekki að nota orðin fyrr en þau höfðu verið notuð í dæmunum. Það benti til þess að orðin vaxandi og minnkandi séu ekki enn þá orðin hluti af þeim stærðfræðilega orðaforða sem nemendur nota. Það gæti komið með tímanum og æfingunni en mögulega hafa nemendurnir ekki náð að tileinka sér námsefnið í kringum vaxandi og minnkandi föll nægilega vel. Það að nemendur hafi ekki náð að tileinka sér fyrra námsefni nægilega vel fellur undir áhrifaþáttinn efnistök í TRU-rammanum.

Í kaflanum hér á undan um áherslu á skilning 2.2 var rætt að til að nemendur myndi skilning þurfi þeir að mynda eigin tengingar milli hluta sem þeir þekkja fyrir og þess sem þeir eru að reyna að skilja. Einn hópur reyndi að lýsa diffrun út frá hugtakinu markgildi, sem þeir voru nýbyrjaðir að læra. Það að sjá hóp tengja markgildi við verkefnið, þrátt fyrir að markgildi væru aldrei nefnd, sýndi að sá hópur væri farinn að sjá tengsl milli hallatölu snertils og markgilda. Önnur tenging sem nemendur mynduðu var að þeir gátu fundið alla punkta á ferlinum þar sem hallatala snertils væri núll, sem voru þrír útgildispunktar. Þannig voru nemendurnir farnir að mynda tengsl milli þess að hallatala snertils falls sé núll og að snertillinn snerti fallið í útgildi, þrátt fyrir að þeir höfðu ekki lært orðið útgildi.

Þrátt fyrir að nemendurnir höfðu myndað tengsl á milli þess að snertill hafi snertipunkt í útgildi og að hallatala snertils væri núll, þá nefndi það enginn í þriðju síðustu og næst síðustu spurningum verkefnisins. Þær voru hvað það táknar fyrir fallið f að hallatala snertils við f í x, táknuð h_x, væri stærri en núll, minni en núll eða jöfn núll gefið að fallið lýsi hraða bíls á tíma eða virði fyrirtækis á tíma. Þegar hallatala snertilsins var jöfn núll sögðu allir hóparnir að fallið væri fasti. Tveimur spurningum fyrr höfðu sex hópar af sjö fundið að hallatala snertils væri núll í útgildispunktum. Voru nemendurnir of uppteknir við að ef $h_x > 0$ væri hröðunin að aukast og ef $h_x < 0$ væri hröðunin að minnka að það þyrfti að vera engin breyting í hröðun þegar $h_x = 0$ og skrifuðu það því nánast hugsunarlaust? Mögulega eru nemendurnir að tengja það að hallatala snertils sé stærri en núll, minni en núll og jöfn núll við það að fall sé vaxandi, minnkandi eða fasti á bili. Spurningin hefði ef til vill komið betur út ef spurt hefði verið sér um hvað það þýddi að hallatala snertilsins væri jöfn 0 beint á eftir útgildisspurningunum og spurningunum um að hallatalan væri stærri eða minni en núll hefði verið sleppt. Aftur á móti mynda þessi svör góða umræðu í skólastofunni þegar nemendum er bent á snertlana sem þeir höfðu tveimur spurningum fyrr sagt að hefðu hallatöluna núll. Síðan væru nemendurnir spurðir hvort fallið væri fasti þar. Annað hvort byrja nemendur að átta sig á því að hallatalan geti orðið núll þrátt fyrir að fallið sé ekki fasti eða síðan kemur í ljós að það vanti eitthvað upp á skilning á hugtökunum. Ef það vantar eitthvað upp á skilning á hugtökunum er hægt að vinna áfram með þau hugtök eða ræða um þau þar til hóparnir eru sammála um að það að hallatala snertils sé núll þýði ekki endilega að fallið sé fasti.

Nokkuð var um það að hóparnir notuðu orðið „líklega“ í svörum sínum, til dæmis „hallatalan verður líklega núll“. Óöryggið í svörunum gæti stafað af því að nemendur treysta ekki sínum eigin svörum. Ef nemendurnir hafa rökstutt eigin hugmyndir ættu þeir að vera ánægðir með eigið svar og treysta því. Það er óþarfi að vera hræddur við að gera mistök í verkefnum eins og þessu, þar sem svarið skiptir ekki höfuðmáli, og því tilvalið að nota slík verkefni í að þjálfa nemendur að treysta eigin röksemdarfærslum. Samkvæmt Yackel og Cobb (1996) er mikilvægt að nemendur noti stærðfræðilega hugsun í svörum sínum og standi með þeim svörum.

Allir hóparnir í rannsókninni náðu að klára verkefnin á þeim tíma sem þeim var gefinn. Nemendurnir sátu í hópunum, ræddu saman innan hópsins og skiluðu svörum á spurningunum. Enginn hópanna sat og starði út í loftið út af skilningsleysi og enginn sat og beið eftir að hinir hópafélagarnir kláruðu verkefnið. Þar sem enginn einn gat sleppt því að taka þátt í verkefninu með hópfélögum án þess að kennari tæki eftir því, náði verkefnið að uppfylla þær kröfur TRU rammans sem settar voru fram í töflu 2.1 um áhrifaþáttinn einstaklingsmiðun. Út frá þeim niðurstöður sem fengust var verkefnið hæfilega krefjandi fyrir nemendurna. Því er niðurstaða fyrri rannsóknarspurningarinnar sú að verkefnið hafi verið hæfilega krefjandi fyrir nemendur í framhaldsskólaáfanga í stærðfræði á þriðja þrepi. Til að fá skýrari niðurstöður hefði þurft stærri rannsókn með nemendur úr ólíkum brautum og ólíkum skólum. En verkefnið var að hæfilegu erfiðleikastigi fyrir nemendurna sem tóku þátt í rannsókninni.

Sex hópar af sjö vildu fá að vita hvernig verkefnið tengdist diffrun eftir að hafa lokið verkefninu. Þeir sex hópar voru áhugasamir um að sjá hvernig aðferðirnar sem þeir notuðu til að finna hallatölu snertils væri hægt að nota til að finna diffurkvóta fallsins í punkti. Sumir hópanna voru sáttir með stutta útskýringu á meðan aðrir vildu fá lengri útskýringu. Því er niðurstaða seinni rannsóknarspurningar sú að varðandi viðhorf nemenda gagnvart diffrun eftir verkefnið megi draga þá ályktun að nemendurnir voru nokkuð áhugasamir um diffrun eftir að hafa leyst verkefnið.

6. Ályktun

Í þessu verkefni fólst að semja verkefni til að hvetja nemendur til stærðfræðilegrar hugsunar ásamt rökstuðningi fyrir verkefnunum og rannsókn þar sem verkefni voru lögð fyrir nemendur. Niðurstöður rannsóknarinnar sýndu að sá hluti verkefnisins sem var prófaður á nemendum væri af hæfilegu erfiðleikastigi fyrir framhaldsskólanemendur á eðlisfræðibraut í stærðfræðiáfanga á þriðja hæfniþrepi. Einnig sýndu niðurstöðurnar að nemendurnir voru flestir áhugasamir um viðfangsefnið eftir að verkefninu var lokið.

Að finna vitsmunalega krefjandi verkefni fyrir nemendur getur verið erfitt. Markmiðið er að halda nemendum í ástandinu sem Liljedahl (2020) kallar flæði. Verkefnin eiga að vera hæfilega krefjandi, vekja áhuga hjá nemendum og dýpka skilning þeirra á námsefninu. Ásamt jákvæðu og hvetjandi námsumhverfi á það að gera nemendur að stærðfræðilegum hugsuðum. Enginn liður í því er einfaldur. Verkefni sem er hæfilega krefjandi fyrir einn getur verið of erfitt eða of auðvelt fyrir annan. Verkefni sem vekur áhuga hjá einum vekur ekki endilega áhuga hjá öðrum. Þar að auki er skilningur hugtak sem fólk túlkar á ólíka vegu. Hér hefur verið lögð áhersla á venslaskilning frekar en tækjaskilning en einnig athugað að skilningur er oft túlkaður sem nægilega góður skilningur samkvæmt til dæmis kennara. Það er alltaf hægt að dýpka skilninginn þó hann sé orðinn nægilega góður. Til að leggja fyrir hæfilega krefjandi verkefni er gott að láta nemendur vinna í hópum og vinna við dæmi þar sem þarf að rökstyðja eigin hugsun en einnig hægt að grafa dýpra í verkefnin fyrir þá sem þurfa meiri áskorun. Í hópum getur nemandi sem þykir verkefnið auðvelt aðstoðað nemanda sem þykir verkefnið erfitt. Áhugi á námsefninu á að fást með því að halda nemendum í flæði.

Eftir gerð þessa verkefnis hef ég styrkst í þeirri trú að í stærðfræðikennslu þurfi að leggja áherslu á að nemendur verði stærðfræðilegir hugsuðir. Á síðustu árum hef ég lagt fyrir verkefni sem eiga að fá nemendur til að hugsa út fyrir rammann og reyna að skilja námsefnið frekar en að læra reglur utanbókar. Ég hef varið miklum tíma í undirbúning slíkra verkefna og hef samt sem áður ekki náð að undirbúa eins mörg slík verkefni og ég hefði viljað. Ég er spennt fyrir því á næstu árum að leggja verkefnið sem hér fylgir fyrir nemendur og fylgjast með hvernig það þróast með tímanum. TRU ramminn mun héðan eftir fylgja mér í kennslu. Sérstaka áherslu mun ég leggja á áhrifaþáttinn skuldbinding, áræðni og sjálfsmynd. Það að styrkja stærðfræðilega sjálfsmynd nemenda og byggja þá upp sem stærðfræðilega hugsuði verður mitt markmið sem stærðfræðikennari.

Á síðastliðnu ári, sem ég hef varið í að vinna í þessu lokaverkefni, hef ég unnið í því að dýpka minn eigin skilning á diffrun. Ég hef lesið kennslubækur í diffrun frá mörgum ólíkum löndum og skoðað hvernig ólíkar starfsstéttir nota diffrun í starfi og hvernig unnið er með diffrun í ólíkum háskólagreinum. Kennslubækurnar voru sérstaklega áhugaverðar þegar kom að þessu verkefni því þar var ljóst hversu fáar kennslubækur í diffrun lögðu áherslu á að nemendur yrðu stærðfræðilegir hugsuðir. Aftur á móti voru nokkrar kennslubækur sem veittu mér mikinn innblástur við gerð verkefnisins. Þar á meðal er Calculus for Biology and Medicine (Neuhauser og Roper, 2018) sem leggur áherslu á dæmi úr raunheiminum og merkir dæmin með undirflokkum, eins og hraði, fólksfjölgun og efnahvörf. Önnur bók sem veitti mér innblástur er Measurements (Lockhart, 2012) sem inniheldur engin dæmi en leggur áherslu á læsilegan texta og nálgast efnið á allt annan hátt en aðrar kennslubækur sem ég hef lesið. Ég mæli með þeim bókum fyrir alla sem hafa áhuga á stærðfræði eða stærðfræðikennslu.

A. Viðauki - Verkefnið

A.1. Verkefni 1

Nonni fór á klukkutíma æfingu eftir skóla. Þegar æfingin hans byrjaði sló hjartað hans 60 slög á mínútu. Þegar upphitunin byrjaði varð hjartslátturinn hraðari. Grafið sem hér fylgir lýsir hve mörg slög á mínútu hjarta Nonna sló á meðan hann var á æfingu. Við munum tákna fallið sem lýsir grafinu f. Á grafinu er hægt að lesa fjölda mínútna af x-ás, þar sem upphaf æfingar er þegar $x = 0$, og af y-ás er fjöldi hjartslátta á mínútu.

Fyrri hluti

1. Skoðaðu grafið. Veltu því fyrir þér hvað það segir þér um æfingu Nonna. Skrifaðu lýsingu á æfingunni. Það má vera saga um æfinguna hans Nonna eða lýsingar á því hvað hann hefur getað verið að gera á hverri stundu á æfingunni sem myndi valda breytingu á púlsinum eins og á grafinu.

2. Hvernig sérðu af grafinu að hjartsláttur Nonna sé að verða hraðari? En hægari?

3. Skoðaðu graf fallsins f. Hvaða gildi hafa $f(10)$ og $f(20)$? Nákvæm gildi sjást ekki svo segðu gildin eins nákvæmt og þú getur lesið af mynd. Teiknaðu punktana $(10, f(10))$ og $(20, f(20))$ inn á grafið. Dragðu línu í gegnum punktana $(10, f(10))$ og $(20, f(20))$ á grafinu. Merktu línuna með l_{10} Hver er hallatala línunnar? Útskýrðu hvernig þú finnur hallatölu línunnar.

4. Hvað upplýsingar gefur línan l_{10} um hjartslátt Nonna? Hvað táknar hallatala línunnar?

5. Hver af eftirfarandi setningum er rétt? Rökstyddu valið.

   a) Á milli 10 og 20 mínútna er hjartsláttur Nonna að verða hraðari.

   b) Á milli 10 og 20 mínútna er hjartsláttur Nonna að hægjast.

c) Á milli 10 og 20 mínútna stendur hjartsláttur Nonna í stað.

d) Á milli 10 og 20 mínútna er hjartsláttur Nonna stundum að hægjast en stundum ekki.

6. Hver af eftirfarandi setningum er rétt? Rökstyddu valið.

    a) Línufallið sem liggur um $(10, f(10))$ og $(20, f(20))$ er vaxandi.

    b) Línufallið sem liggur um $(10, f(10))$ og $(20, f(20))$ er minnkandi.

    c) Línufallið sem liggur um $(10, f(10))$ og $(20, f(20))$ er fasti.

7. Teiknaðu inn á myndina línu sem liggur um $(15, f(15))$ og $(20, f(20))$ og merktu hana með l_{15}. Hver er hallatala línunnar?

8. Skoðum l_{10} og l_{15}. Hvor þeirra hefur stærri hallatölu? Getur þú af hallatölunum dregið einhverjar ályktanir um hvort hjartslátturinn sé hraðari á tímabilinu 10 til 15 mínútur eða á tímanum 15 til 20 mínútur? Samsvarar það því sem þú getur lesið af grafinu?

9. Látum l_t tákna línu sem liggur um $(t, f(t))$ og h_{l_t} tákna hallatölu þeirrar línu. Látum $t \in \{10;\ 15;\ 19;\ 19,99;\ 20,01;\ 21;\ 25\}$. Raðaðu hallatölum línanna í röð frá minnstu yfir í stærstu. (Það má teikna þær á grafið til að sjá þær fyrir sér ef það hjálpar).
Hvar í þessari röð ætti hallatala línu að vera ef t er svo ótrúlega nálægt 20 að við getum ekki greint punktana að? Köllum þá línu l_{20}.

10. Teiknaðu l_{20} inn á grafið.
Punkturinn $(20, f(20))$ kallast *snertipunktur* línunnar sem þið voruð að teikna. Línan sjálf kallast *snertill* fallsins f í punktinum $(20, f(20))$

11. Hver af eftirfarandi staðhæfingum er rétt? Rökstyðjið valið.

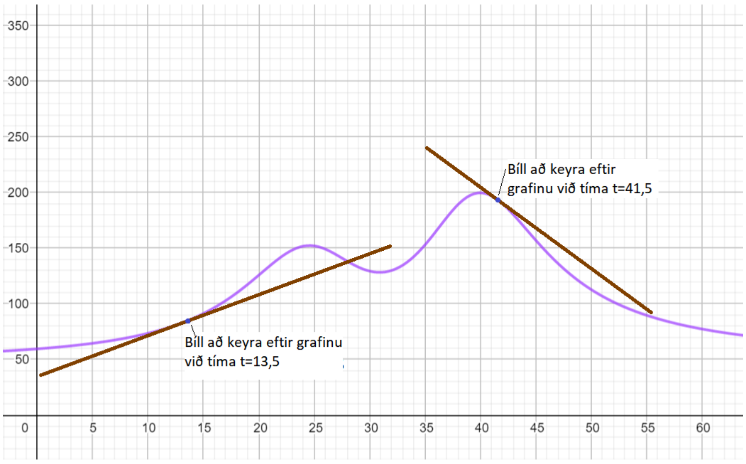
    a) Þegar 20 mínútur eru búnar af æfingu Nonna er hjartsláttur hans að verða hraðari.

    b) Þegar 20 mínútur eru búnar af æfingu Nonna er hjartsláttur hans að verða hægari.

    c) Þegar 20 mínútur eru búnar af æfingu Nonna er hjartsláttur hans ekki að taka breytingum.

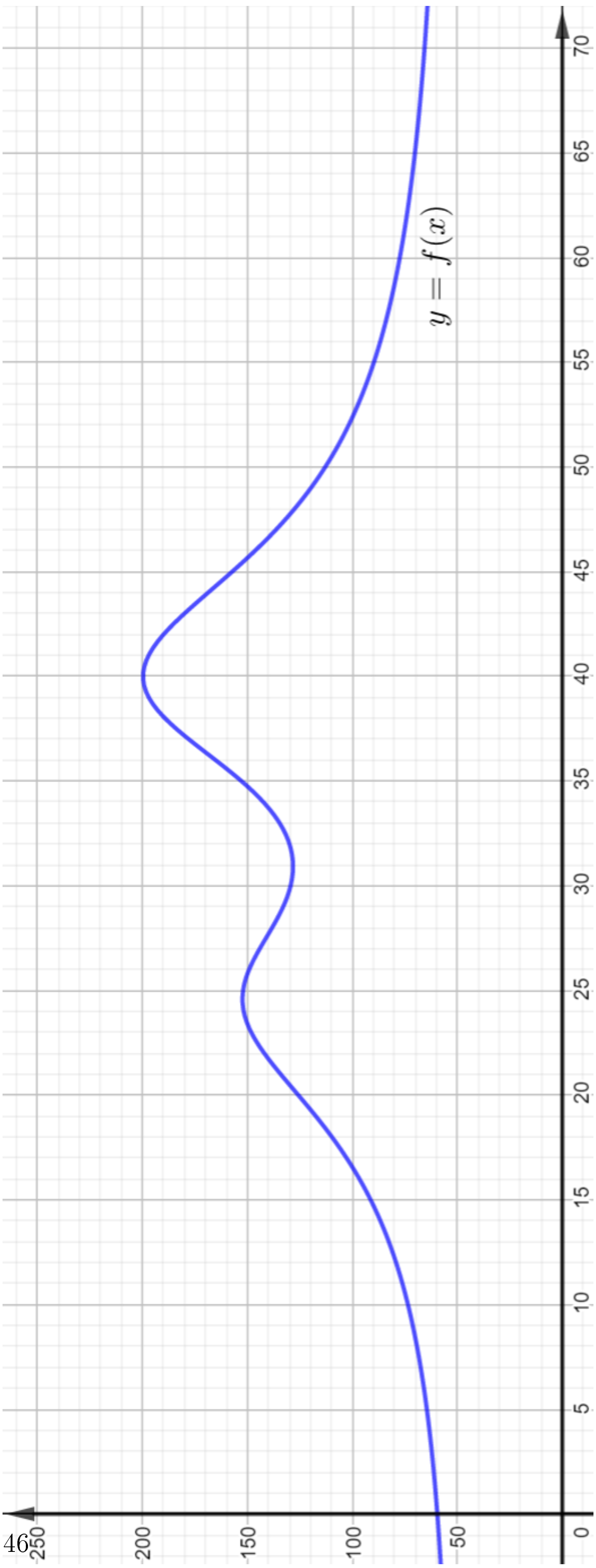
    d) Þegar 20 mínútur eru búnar af æfingu Nonna getum við ekki sagt til um það hvort hjartsláttur hans sé að verða hraðari, hægari eða verði óbreyttur.

Ein leið til að sjá fyrir sér hver snertill línu er í hverjum punkti er að ímynda sér að pínulítill bíll með langa beina spýtu á þakinu sé að keyra eftir grafinu. Halli spýtunnar væri þá hallatala snertilsins í þeim punkti sem er staðsettur á hverjum tíma. Myndin hér að neðan útskýrir þetta myndrænt. Opnaðu Geogebru forritið til að sjá hvernig snertillinn breytist fyrir ólík gildi á grafinu.



12. Eftir 27 mínútur af æfingu Nonna mældist hjartsláttur hans 144 slög á mínútu en eftir 30 mínútur mældist hjartsláttur hans 130 slög á mínútu. Snertill við fallið í $t = 27$ hefur hallatöluna $h_{30} \approx -2,4$ og snertillinn við fallið í $t = 30$ hefur hallatöluna $h_{27} \approx -5,7$. Hver er munurinn á hjartsláttabreytingum Nonna við tímann 27 mínútur og 30 mínútur? Hvað táknar hallatala snertlanna við þær tímasetningar?

13. Nonni vill ekki að hjartslátturinn sinn rjúki of hratt upp þegar hann er á æfingu. Hann vill alls ekki að hjartslátturinn aukist um meira en 10 slög á mínútu á mínútu. Þarf hann einhvern tímann að hægja á sér á æfingunni svo það gerist ekki? Ef nei, hvers vegna ekki? Ef já, nefndu dæmi um hvenær hann þarf þess.


y = f(x)
0
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50
55
60
65
70
50
100
150
200
250

Seinni hluti

1. Hvenær á æfingunni breytist hjartsláttur Nonna úr því að vera að hraða á sér í að vera að hægja á sér og öfugt? Útskýrðu hvernig þú finnur það út.

2. Skoðaðu punktinn $(40, f(40))$ á grafinu. Athugaðu að fallið tekur stærsta gildi $f(40)$ í $x = 40$.

3. Er línufall sem liggur um $(35, f(35))$ og $(40, f(40))$ vaxandi, minnkandi eða fasti?

4. Er línufall sem liggur um $(45, f(45))$ og $(40, f(40))$ vaxandi, minnkandi eða fasti?

5. Látum m_t tákna línu sem liggur um $(40, f(40))$ og $(t, f(t))$. Látum h_{m_t} tákna hallatölu línunnar. Látum $t \in \{35;\ 45;\ 39;\ 41;\ 39,99;\ 40,01\}$. Raðaðu halltölum línanna m_t í röð frá minnstu yfir í stærstu. Merktu einnig hvaða hallatölur eru stærri en 0 og hverjar eru minni en 0.

6. Hvernig myndi snertill fallsins í $(40, f(40))$ líta út? Teiknaðu þá línu inn á grafið. Hver er hallatala línunnar?

7. Eru fleiri punktar á grafinu þar sem snertillinn í þeim punkti myndi gefa sömu hallatölu? Hvaða punktar? Ef svo er, er eitthvað sameiginlegt með þeim punktum? Hvað getur þú sagt um hjartslátt Nonna í þessum punktum?

8. Hugsaðu þér núna að þú sért að skoða hallatölu línu sem liggur um $(x_0, f(x_0))$ og punkt ótrúlega nálægt honum. Athugum að $(x_0, f(x_0))$ er punktur á grafinu. Settu fram lýsingu á því hvernig maður finnur hallatölu milli þessara punkta. Ímyndaðu þér að þú værir að fá þessa lýsingu í hendurnar áður en þú byrjaðir á verkefninu og ættir að nota hana til að finna hallatöluna. Lýsingin á að geta staðið ein og sér óháð öðrum svörum í verkefninu.

9. Ímyndum okkur að grafið sé að lýsa hraða bíls í m/s og x-ás lýsi tímanum í sekúndum. Látum hallatölu snertils við f í $(x, f(x))$ vera h_x. Hvað segir það þér um hraða bílsins á tíma x ef

   a) $h_x > 0$?

   b) $h_x < 0$?

   c) $h_x = 0$?

10. Ímyndum okkur að y-ás séu milljónir króna, x-ás séu ár og ferillinn f lýsi virði fyrirtækis. Látum hallatölu snertils við f í $(x, f(x))$ vera h_x. Hvað segir það þér um virði fyrirtækisins á tíma x ef

    a) $h_x > 0$?

    b) $h_x < 0$?

    c) $h_x = 0$?

11. Skoðið grafið aftur. Er til punktur $(x_0, f(x_0))$ á grafi fallsins f þar sem ekki er hægt að finna hallatölu snertils? Ef svo er, fyrir hvaða gildi á x_0? Ef svo er ekki, teiknið graf falls þar sem ekki væri hægt að finna hallatölu snertils í punktinum $(0, f(0))$.

A.1.1. Aukaverkefni fyrir verkefni 1

Púlsmæling

Tími	Púls
0	
20	
40	
60	
80	
100	
120	
140	
160	
180	

Spurningar

1. Hvernig er best að skala ásana?
2. Er ferillinn mjúkur eða ætti að draga á milli punkta með reglustiku? Hvort ætti að gefa nákvæmari niðurstöðu?
3. Hvenær var hjartslátturinn að aukast mest? Hvenær var hann að aukast minnst? Hvenær var að hægjast mest á hjartslættinum? Hvenær var að hægjast mest? Hvernig myndir þú tákna þessa hluti með $f'(x)$?
4. Hvort tók styttri tíma fyrir hjartsláttinn að aukast eða hægjast?
5. Útskýrðu hvað $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$ og $f'(x) = 0$ tákna á þessu grafi og komdu með dæmi um hvenær $f'(x) > 0$, $f'(x) < 0$ og $f'(x) = 0$.

A.1.2. Úrvinnsluverkefni (leiðbeiningar til kennara)

Fáið hvern hóp til að skrifa á lítið blað hvernig þeir myndu útskýra fyrir vini hvernig þeir ættu að finna hallatölu snertils í punkti $(x_0, f({}_0x))$. Safnið öllum blöðunum saman og hengið upp á vegg. Skiptið í nýja hópa og biðjið hvern nýjan hóp að skoða hvað sé sameiginlegt í útskýringunum og hvað sé ólíkt. Fáið hópana einnig til að taka fram hvað þeir telja að sé nauðsynlegt að hafa með og hverju mætti sleppa. Biðjið loks hópana að skrifa upp nýja útskýringu eftir að hafa rýnt í útskýringar fyrri hópa.

Gefið hópunum ný blöð. Biðjið hópana að koma með eins mörg ólík dæmi og þeir geta um fall f og punkt $(x_0, f(x_0))$ þar sem ekki er hægt að finna snertil við f í x_0. Þegar 5 mínútur eru eftir af kennslustundinni eru hóparnir beðnir að koma með dæmi um slíkt fall. Ef enginn hópur lítur út fyrir að vera að finna dæmi, biðjið þá hópana um að koma með dæmi um fall sem hefur ekki markgildi í einhverjum punkti.

A.2. Verkefni 2

1. Bíll leggur af stað úr kyrrstöðu. Staðsetningu hans í metrum við tíma t sekúndur má lýsa með ferli fallsins $f(x) = x^2$ frá tímanum 0 til 12 sekúndur. Hraði bílsins við tíma t er jafn hallatölu snertils við f í t.

   a) Á hvaða hraða er bílinn eftir 1 sekúndu?

   b) Á hvaða hraða er bíllinn eftir 5 sekúndur?

   c) Á hvaða hraða er bíllinn eftir 10 sekúndur?

   d) Getur þú séð eitthvað mynstur út úr þessu? Samkvæmt því, hver ætti hallatala snertils við f að vera við tíma t? Ef þú sérð ekkert mynstur, prófaðu þá fleiri tölur og gáðu hvort það hjálpar.

   e) Prófaðu að finna hallatölu snertilsins í fleiri punktum (helst ekki bara heilum tölum) og gáðu hvort hallatalan sé ennþá sú sama og þú gerðir ráð fyrir í lið 4.

2. Öflugri bíll leggur af stað úr kyrrstöðu. Staðsetningu hans í metrum við tíma t sekúndur má lýsa með ferli fallsins $f(x) = x^3$ frá tímanum 0 til 6 sekúndur.

   a) Á hvaða hraða er bíllinn eftir 1 sekúndu?

   b) Á hvaða hraða er bíllinn eftir 2 sekúndur?

   c) Á hvaða hraða er bíllinn eftir 3 sekúndur?

   d) Getur þú séð eitthvað mynstur út úr þessu? Samkvæmt mynstrinu, hver ætti hallatala snertils við f að vera við tíma t?

3. Ef við gerum það sama fyrir fallið $f(x) = x^4$. Getur þú fundið hver hallatala snertils við f ætti að vera við tíma t?

4. Ef þú heldur svona áfram, getur þú fundið mynstur fyrir hallatölu snertils við $f(x) = x^n$ í t ef $n \in \mathbb{Z}_+$?

A.2.1. Úrvinnsluverkefni (leiðbeiningar til kennara)

Byrjið á að setja fram skilgreiningu á diffranleika og diffurkvóta. Biðjið hópana um að leiða út $\frac{d}{dx}x^n = nx^{n-1}$ ef $x \in \mathbb{Z}_+$ með því að nota $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{x - x_0}{x - x_0}$.

Fáið síðan hópana til að íhuga hvort reglan gildi fyrir fleiri n en bara jákvæðar heiltölur. Biðjið um rökstuðning á því hvort reglan gildi eða gildi ekki fyrir $n \in \{\frac{1}{2}, -1, -2, -\frac{1}{2}\}$.

Þegar tíu mínútur eru eftir af kennslustundinni skal spyrja nemendur út í niðurstöður. Bæði skref í útleiðslunni á afleiðu veldisfalla, sérstaklega ef einhver skref eru stór eða ólík skrefum hjá öðrum hópum, og niðurstöður um hvort reglan gildi fyrir fleiri gildi á n.

A.3. Verkefni 3

Nanna ætlar að gefa systur sinni heimagert nammi í afmælisgjöf. Hún ætlar að búa til kassa utan um nammið úr þykku blaði (2,1x2,97 dm). Botnflötur kassans á að vera ferningslaga. Nanna vill að rúmmál kassans sé eins mikið og mögulegt er til að geta komið sem mestu nammi fyrir. Hvaða hliðarlengdir ætti kassinn að hafa til að rúmmál hans sé sem mest?

Áður en þið byrjið, veltið fyrir ykkur eftirfarandi hlutum:

Gerum ráð fyrir að kassinn hafi ferningslaga botnflöt að stærð $x \cdot x$ og hæð y.

1. Finnið gildi sem x og y geta ómögulega tekið. Af hverju?
2. Hvert er minnsta gildi sem x getur tekið? En stærsta?
3. Hvert er minnsta gildi sem y getur tekið? En stærsta?
4. Hvort mynduð þið halda að það borgi sig að hafa x eða y stærra? Af hverju?

Stærð kassans:

1. Látum x tákna hliðarlengdir botnflatarins og y tákna hæð kassans. Hvert er yfirborðsflatarmál kassans?
2. Ef $y = f(x)$, hvað er $f(x)$?
3. Hvert er rúmmál kassans?
4. Skiptu út y í jöfnunni fyrir einangraða $f(x)$ úr lið 2. Núna ertu með fall sem lýsir rúmmáli kassans í lítrum fyrir x í dm.
5. Teiknaðu graf fallsins.
6. Út frá grafinu þínu, fyrir hvaða gildi á x er rúmmálið stærst? Hvert er rúmmálið þá?
7. Hallatala snertils í punktinum $(t, f(t))$ er $h_t = 1,55925 - \frac{3}{2}x^2$. Með þeim upplýsingum getur þú komið með nákvæmara gildi fyrir hverjar hliðarlengdir á kassanum eiga að vera til að rúmmálið sé stærst og hvert rúmmálið sé þá?
8. Færðu svipaðar niðurstöður úr 6 og 7?

9. Opnaðu Geogebruforritið fyrir verkefnið. Er munur á niðurstöðunni þinni og því sem fæst úr Geogebru? Ef svo, hvers vegna heldur þú að svo sé?

A.3.1. Úrvinnsluverkefni

Leyfið nemendum að skoða nánar ákveðna hluti í tengslum við það sem þeir hafa verið að læra í verkefnunum. Ef nemendur koma með eigin hugmyndir að úrvinnsluverkefni má bæta þeim við listann.

- Hvert er stærsta mögulega rúmmál konfektkassans ef botnflöturinn er hringur? Hvort er hægt að fá stærri kassa ef botnflöturinn er hringur eða ferningur? Hvert er stærsta mögulega rúmmál kassans ef hlutfallið milli lengdar og breiddar hans er 2:1? Hvert er minnsta mögulega yfirborðsflatarmál kassa með ferningslaga botnflöt og rúmmál 1L?

- Velta fyrirtækis hefur verið að aukast á síðustu árum. Til að einfalda lífið skulum við láta fallið $f(t) = \dfrac{t^2}{16}$ lýsa veltunni í milljónum við tíma t ár.

    1. Hve mikið eykst veltan milli ára $9\frac{11}{12}$ og 10? Hvernig finnur þú það? Útskýrðu og færðu rök fyrir.

    2. Segjum að núna séu liðin 9 ár og 11 mánuðir frá stofnun fyrirtækisins og við viljum vita um það bil hver veltan verði eftir 1 mánuð ef ekkert drastískt gerist. Komið með hugmyndir um hvernig þið mynduð gera það og rökstyðjið hugmyndirnar. Athugið að þið vitið öll gildi fallsins frá og með 0 til og með $9\frac{11}{12}$ en engin gildi eftir það.

- Í eðlisfræði er staðsetning hlutar sem hreyfist eftir beinni línu við tíma t oft táknaður með $s(t)$. Þá er hraðinn við tíma t táknaður $v(t)$ og hröðun við tíma t táknuð $a(t)$. Notaðu niðurstöður úr verkefni 1 til að sýna hvernig $s(t)$, $v(t)$ og $a(t)$ tengjast. Hér má búa til myndband, veggspjald eða myndræna stutta skýrslu.

B. Viðauki - Matskvarði

Hér má finna matskvarða fyrir verkefnin þrjú. Ef notast er við matskvarðann skal láta nemendur hafa hann í upphafi verkefnis svo þeir viti hvaða kröfur séu gerðar til sín í verkefninu. Ekki er mælt með því að gefa einkunn í tölum eða orðum fyrir verkefnin.

Tafla B.1: Matskvarði fyrir verkefnin

	Mikil þörf á að bæta	Ásættanlegt með tækifæri á frekari bætingu	Á góðri leið
Vinna í tímum	Mikill tími fór í spjall um annað en verkefnið. Spurningar til kennara voru öráreitisspurningar og nemendur höfðu ekki sýnt fram á sjálfstæða hugsun áður en kennari var spurður.	Mestur tími fór í verkefnið og nemendur spurðu kennara aðeins eftir að hafa reynt á eigin spýtur. Spurningar til kennara voru uppbyggilegar og ekki öráreitisspurningar.	Nemendur lögðu sig mikið fram í tímanum. Ef einhverjar spurningar komu upp reyndu þeir að finna svar upp á eigin spýtur áður en kennari var spurður.
Rök-stuðningur	Hugmyndir eru ekki rökstuddar. Svör eru stutt eða ekki til staðar.	Flestar hugmyndir eru rökstuddar en ekki alltaf þannig að samnemandi geti fylgt rökstuðningnum eftir og skilið hugmyndirnar að baki.	Hugmyndir eru rökstuddar og litlir eða engir hnökrar eru í rökstuðningnum. Auðvelt væri fyrir samnemanda að fylgja röksemdarfærslunni og skilið úrlausn verkefnisins.
Spurningar kennara	Spurningum kennara var ekki svarað, svarað með skætingi, útúrsnúningi eða alveg án rökstuðnings þegar kennari óskaði eftir honum.	Spurningum kennara var svarað þannig að flestir samnemendur gátu skilið.	Spurningum kennara var svarað þannig að samnemendur gátu skilið eða skilið eftir að hafa verið beðnir um nánari útskýringar.
Frágangur í verkefni 1 og 3	Erfitt er að lesa svörin, svörin eru skrifuð hér og þar eða ólæsilega.	Svörin voru snyrtilega upp sett.	Svörin voru snyrtilega upp sett og vitnað var í myndir þegar það átti við og hvar myndirnar væri að finna.
Frágangur í verkefni 2	Nánast ekkert eða ekkert er skrifað á lárétta flötinn.	Unnið var í dæmum á lárétta fletinum en erfitt var að vita hvaða lausnir væru hvar.	Unnið var í dæmum á lárétta fletinum og útreikningar sýndir á skýran og skipulagðan hátt.

C. Viðauki - Verkefnalýsing og kennsluleiðbeiningar

C.1. Lýsing verkefnis

Verkefnið samanstendur af þremur minni verkefnum sem hægt er að taka í röð eða velja eitt og nýta það óháð hinum. Með hverju verkefni fylgir úrvinnsluverkefni. Hægt er að taka eitt úrvinnsluverkefni í lokin eða taka öll.

C.2. Aðalnámskrá

Verkefnið er byggt á námsefni á þriðja hæfniþrepi í stærðfræði samkvæmt Aðalnámskrá framhaldsskóla (Mennta- og menningamálaráðuneytið, 2011). Þar eiga nemendur meðal annars að hafa fullt vald á beitingu táknmáls og diffrun og geta byggt eigin sannanir tengdar hugtökunum. Einnig eiga nemendur að geta

- skráð lausnir sínar á skipulegan hátt
- skipst á skoðunum við aðra um eigin lausnir og annarra manna lausnir
- útskýrt eigin hugmyndir og verk á skiljanlegan hátt, bæði í mæltu máli og myndrænt
- áttað sig á tengslum ólíkra stærðfræðilegra aðferða
- beitt gagnrýnni og skapandi hugsun og frumkvæði við lausn verkefna.

Í verkefninu er reynt að ná fram þessum hæfniviðmiðum hjá nemendum. Í matskvarða fyrir verkefnið (sjá viðauka B) er matið miðað við að uppfylla kröfur frá aðalnámsskrá. Hér á eftir er skoðað hvernig reynt er að uppfylla hvert viðmið í verkefninu.

- Geta beitt stærðfræðilegu táknmáli
  - Í hvert sinn sem unnið er í stærðfræði er verið að æfa sig í stærðfræðilegu táknmáli. Í verkefninu eru þar að auki nemendur að vinna í litlum hópum þar sem þeir geta bent hverjum öðrum á ef eitthvað vantar upp á stærðfræðilegt táknmál þeirra. Þegar farið er yfir verkefnin í sameiningu geta bæði kennari og aðrir hópar bent á ef eitthvað mætti betur fara í stærðfræðilegu táknmáli. Þá hafa nemendur tækifæri á að bæta sig í beitingu á stærðfræðilegu táknmáli bæði með því að fá ábendingar um eigið táknmál og með því að læra af því sem mætti betur fara hjá öðrum.
- Geta byggt eigin sannanir
  - Æfing í sönnunum á sér stað með röksemdarfærslu í verkefninum.
  - Nemendur eiga að búa til eigin sönnun í úrvinnsluverkefni í verkefni 2 (sjá A.2.1).
- Geta skráð lausnir sínar á skipulegan hátt
  - Nemendur eiga að skila verkefnum 1 og 3 til kennara á blöðum. Í frágangi í matskvarða (sjá viðauka B) eru gerðar kröfur til snyrtilegs og skipulagðs frágangs.
- Geta skipst á skoðunum við aðra um eigin lausnir og annarra manna lausnir
  - Verkefnin eru hópavinna svo nemendur þurfi að skiptast á skoðunum innan hópsins.
  - Unnið er úr svörum með öllum hópnum saman og þá þurfa nemendur að skiptast á skoðunum um lausnir annarra hópa.
- Geta útskýrt eigin hugmyndir og verk á skiljanlegan hátt, bæði í mæltu máli og myndrænt
  - Þegar unnið er úr svörum hvers hóps með öllum hópnum þurfa nemendur að geta útskýrt eigin lausnir og þær hugmyndir sem liggja þar að baki. Þetta atriði er hluti af liðnum „Spurningar kennara“ í matskvarða (sjá viðauka B).
  - Þegar nemendur eru í litlum hópum að vinna verkefnið verða þeir að geta útskýrt eigin hugsun nægilega vel fyrir hópafélögum til að þeir skilji hvern annan.

- Nemendur þurfa að skila verkefni 1 og 3 á blaði nægilega skýrt til að samnemendur gætu skilið röksemdarfærslu. Þetta atriði er hluti af liðnum rökstuðningur í matskvarða (sjá viðauka B).
- Í verkefni 1 þurfa nemendur að teikna snertla og rökstyðja hallatölu þeirra og fleira út frá mynd.
- Í verkefni 3 þurfa nemendur að vinna með bestunardæmi á myndrænan hátt.

- Áttað sig á tengslum ólíkra stærðfræðilegra aðferða
  - Verkefnin byggjast að miklu leyti á því að tengja diffrun við stærðfræðilegar aðferðir sem nemendur þekkja fyrir. Leitað er eftir því að nemendur myndi tengsl milli diffrunar og eiginleika falla og hallatölu lína.
- Geta beitt gagnrýnni og skapandi hugsun og frumkvæði við lausn verkefna
  - Verkefnin eiga að hvetja nemendur til að beita skapandi hugsun. Spurningarnar eru þannig að nemendur eiga að þurfa að spjalla saman og beita gagnrýnni hugsun.
  - Í samvinnuverkefnum þarf að beita frumkvæði til að góð vinna myndist í hópnum.
  - Úrvinnsluverkefni 2 byggir á því að nemendur skrifi upp eigin sönnun, sem reynir á gagnrýna og skapandi hugsun.
  - Úrvinnsluverkefni 3 byggir á því að nemendur fái að ráða hvernig þeir vinna áfram með verkefnin sem þeir hafa verið að leysa. Það sýnir skapandi hugsun og frumkvæði hjá nemendum.

C.3. Viðauki - Markmið verkefnis

Markmið verkefnisins er að byggja upp skilning á diffrun. Í skilningnum ætti að felast hvernig snertlar tengjast diffrun, myndrænn skilningur á diffrun, tengsl diffrunar við augnabliksbreytingu og geta fundið notagildi diffrunar. Verkefnið er byggt upp með það í huga að nemendur hafi tækifæri á því að upplifa eigin aha-augnablik í tengslum við diffrun, annað hvort á meðan á verkefninu stendur eða þegar farið er í hefðbundin diffrunarreikninga eftir á.

Áður en verkefnið er lagt fyrir eiga nemendur að hafa kynnst eftirfarandi

- Finna fallgildi út frá mynd.
- Finna hallatölu línu.
- Þekkja hugtökin vaxandi og minnkandi
- Leysa einföld markgildi

Þegar verkefninu er lokið ættu nemendur að geta

- sagt hver hallatala falls er í útgildum (án þess að þurfa að þekkja orðið útgildi).
  - Í spurningu 6 og 7 í seinni hluta verkefnis 1 er markmiðið að finna hallatölu falls í útgildi og reyna að finna alla aðra útgildispunkta fallsins.
  - Hallatala falls í útgildum er skoðuð aftur í spurningu 6 og 7 í verkefni 3.
- fundið snertil við fall í punkti út frá grafi
  - Í spurningu 10 í fyrri hluta verkefnis 1 og spurningu 6 í seinni hluta verkefnis 1 eiga nemendur að teikna snertil við fall í punkti þegar aðeins grafið er gefið.
- útskýrt hvernig hallatala snertils er fundin
  - Í spurningu 8 í seinni hluta verkefnis 1 eiga nemendur að útskýra fyrir vin hvernig þeir finna hallatölu snertils. Í úrvinnsluverkefni fyrir verkefni 1 A.1.2 er unnið úr svörum allra hópa við þeirri spurningu og hóparnir mega nota svör annarra hópa til að bæta eigið svar.
- komið með dæmi um hvað hallatala snertils í punkti táknar fyrir gefið fall í þeim punkti.
  - Í fyrri hluta verkefnis 1 (sjá viðauka A.1) er markmiðið að vita eitthvað um hvað hallatala snertils í punkti táknar fyrir gefið fall í þeim punkti. Sér í lagi eru spurningar 9 og 11 til 13 um hvað hallatala snertils í punkti táknar.
  - Í seinni hluta verkefnis 1 (sjá viðauka A.1) fjalla dæmi 7, 9 og 10 um nokkrar af þeim upplýsingum við getum fengið um fall frá hallatölu snertils.

- þekkja diffurkvóta veldisfalls í punkti.
  - Verkefni 2 (sjá viðauka A.2) byggir á því að nemendur leiði út diffurkvóta veldisfalls. Sér í lagi í spurningu 4.
- leyst einföld bestunardæmi.
  - Í verkefni 3 (sjá viðauka A.3) er verið að leysa bestunardæmi. Með því að svara spurningunum og velta þeim fyrir sér ættu nemendur að hafa einhvern skilning á hvernig þeir leysa bestunardæmi af svipuðu erfiðleikastigi.

C.4. Hvað þarf að hafa í huga áður en hafist er handa?

Verkefnið er gert fyrir nemendur sem hafa lært um föll, eiginleika falla og einföld markgildi. Upprifjun á hugtökum tengd föllum og markgildum er ákjósanleg ef einhver tími er síðan nemendur unnu síðast með þessi hugtök.

Mikilvægt er að brýna fyrir nemendum að verkefnið byggist ekki á því að fá rétt svar. Verkefnið byggist á því íhuga, byggja upp skilning og nota fyrri þekkingu til að rökstyðja hugmyndir sínar. Ekki er ákjósanlegt að nemendur fái einkunn fyrir verkefnin. Mat á að fara fram munnlega í lok hvers tíma en einnig er hægt að skrifa athugasemd við verkefnin eða nota matskvarða í viðauka B. Ef verkefnið þarf að gilda til einkunnar þá er mikilvægt að vinnan við hvert verkefni gildi, ekki hvort lokaniðurstaðan hafi verið rétt.

Ef nemendur hafa ekki verið að leysa verkefni þar sem þeir eru beðnir um að rökstyðja svör sín fyrir bekkjarfélögum, getur það reynst þeim erfitt. Gott er að brýna fyrir nemendum að ef kennari véfengir svar þeirra eða biður um nánari útskýringar, þarf það ekki að þýða að það sé rangt. Í verkefninu eru nemendur beðnir um að útskýra svör sín, en ekki er alltaf ljóst fyrir nemendum hvað felst í því. Útskýrið fyrir nemendum að rökstuðningur og útskýringar eiga að vera fyrir samnemendur til að skilja hugsunarhátt þess sem er að útskýra (Yackel og Cobb, 1996).

C.5. Verkefni 1

Verkefni 1 skiptist í tvo hluta og krefst hvor hluti einnar kennslustundar.

Forkröfur
Til að geta unnið verkefnið þurfa nemendur að þekkja hugtökin fall, fallgildi, lína, vaxandi, minnkandi, fasti og markgildi.

Tæki og tól
Nemendur þurfa blýjant, reglustiku, blað með verkefninu á, mynd af grafinu, krassblöð og blöð til að hreinskrifa á. Einnig þarf hver hópur að hafa síma, tölvu eða annað tæki til að komast inn á Geogebru hlekkinn: `https://www.geogebra.org/m/ayn3cswj`.

Hópastærð
Best er að skipta nemendum í þriggja manna hópa. Ef fjöldi nemenda er ekki margfeldi af þremur, skal hafa einn til tvo tveggja manna hópa. Forðist stærri hópa til að koma í veg fyrir að einhverjir nemendur geti komist hjá því að taka virkan þátt.

Markmið
Markmið verkefnisins er að eftir að verkefninu er lokið geti nemendur

- Teiknað snertil við fall
- Fundið hallatölu snertils við fall af grafi fallsins
- Sagt til hver hallatala falls er í útgildi (án þess að þekkja orðið útgildi) og geta fundið öll útgildi fallsins.
- Útskýrt fyrir jafningja hvernig hallatala snertils er fundin
- Útskýrt hvað hallatala snertils táknar fyrir ólík raunveruleg dæmi.

C.5.1. Tillaga að framvindu fyrri kennslustundar

Gefið nemendum í kringum 25 mínútur til að leysa verkefnið eftir að hafa kynnt það fyrir þeim. Fylgist með nemendum og hlustið á samræðurnar. Þegar 25 mínútur eru liðnar skal fara yfir verkefnið munnlega með nemendum. Spyrjið ólíka nemendur úr hverjum hóp út í svör sín við verkefnunum. Óþarfi er að spyrja alla út í hverja einustu spurningu.

Hér fyrir neðan koma dæmi um spurningar sem hægt væri að spyrja nemendur.

Dæmi um spurningar:

- Hvernig lýstuð þið æfingunni hans Nonna?
- Hvernig sáuð þið af grafinu hvenær hjartsláttur Nonna var að verða hraðari eða hægari? Var einhver sem notaði öðruvísi aðferð en hópurinn sem var að lýsa sinni?
- Hvort var hjartsláttur Nonna að verða hraðari, hægari eða stóð hann í stað á milli 10 og 20 mínútna? Hvernig komst þú að þeirri niðurstöðu?
- Hvernig teiknaðir þú snertilinn í spurningu 9? Hvers vegna valdir þú að teikna snertilinn svona?
- Hvort sagðir þú að Nonni þyrfti að hægja á sér til að hjartslátturinn aukist ekki um meira en 10 slög á mínútu á mínútu eða ekki? Leiddu okkur í gegnum hugsunargang þinn þegar þú fannst út úr því.
- Hverju tókuð þið eftir varðandi sambands milli hallatölu snertils í punkti og grafi fallsins?
- Hvaða spurningar vakti Geogebru forritið hjá ykkur?

Hér fyrir neðan koma dæmi um hvernig hægt er að vinna áfram með svör nemenda við spurningum kennara til að fá nánari skýringu á þeirri hugsun sem liggur að baki svaranna. Svör nemenda eru byggð á svörum þeirra sem tóku þátt í rannsókninni.

Dæmi um svör nemenda við spurningum kennara:

Kennari:	Hvernig lýstuð þið æfingunni hans Nonna?
Nemandi A:	Fyrst hljóp Nonni í 25 mínútur, síðan labbaði hann í 7 mínútur, hljóp aftur í 8 mínútur og labbaði síðan síðustu 20 mínúturnar.
Kennari:	Takk fyrir að deila. Hvernig lýstuð þið æfingunni hans Nonna?
Nemandi B:	Fyrst fór Nonni að hlaupa í 25 mínútur. Síðan stoppaði hann og tók sér smá hvíld á milli 25 og 31 mínútna. Síðan fór hann aftur að hreyfa sig þangað til 40 mínútur voru búnar. Þá fór hann að gera rólegar kviðæfingar og teygja þangað til æfingin var búin.
Kennari:	Takk fyrir að deila. Hvað var sameiginlegt með því sem þessir tveir hópar sögðu? Var eitthvað ólíkt?

Nemandi C:	Báðir hlupu í byrjun. Annar hópurinn labbaði á meðan hinn hvíldi.
Kennari:	Takk fyrir að deila. Er einhver sem vill bæta við öðru eða er með spurningar til hinna hópanna?

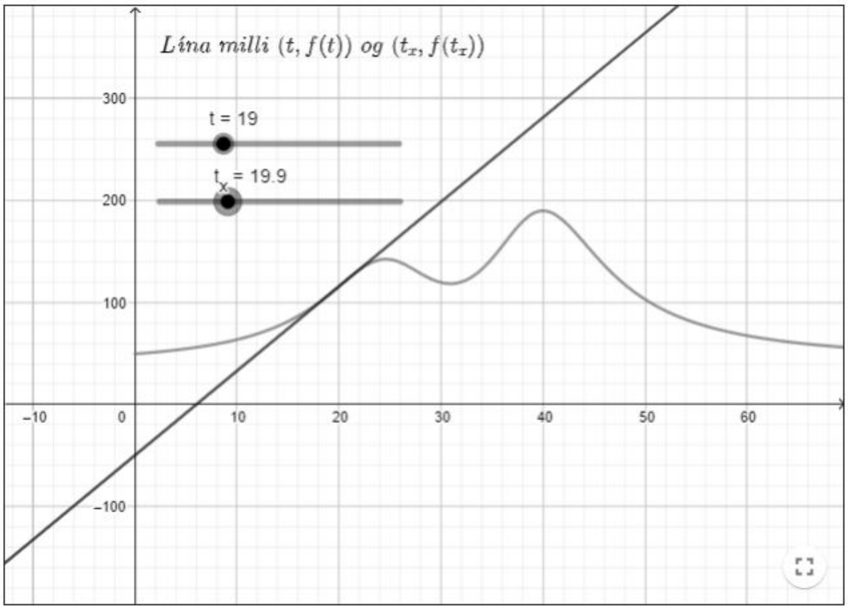
Kennari:	Hvort sagðir þú að Nonni þyrfti að hægja á sér til að hjartslátturinn aukist ekki um meira en 10 slög á mínútu á mínútu eða ekki?
Nemandi D:	Hann þarf að hægja á sér.
Kennari:	Hvers vegna segir þú það?
Nemandi D:	Á milli 35 og 38 mínútna fer hjartslátturinn upp um 13,3 slög á mínútu.
Kennari:	Þannig að á mínútu 38 er hjartslátturinn 13,3 slögum hærri en á mínútu 35?
Nemandi D:	Nei, að meðaltali 13,3 slög.
Kennari:	Hvenær á þessum mínútum ætti Nonni þá að hægja á sér?
Nemandi D:	Einhvern tímann á milli 35 til 38 mínútna.
Kennari:	En ef hann stoppar eftir 38 mínútur þá hefur hjartslátturinn verið að aukast of hratt á milli 35 og 38 mínútna samkvæmt því sem þú sagðir? Hvenær þarf hann að stoppa til að hjartslátturinn verði aldrei of hraður?
Nemandi D:	35 mínútur?
Kennari:	Takk fyrir að deila. Var einhver með aðra niðurstöðu eða er með spurningar til hópsins?
Nemandi E:	Við sögðum 34 mínútur.
Kennari:	Hvernig fenguð þið 34 mínútur?

Geogebra

Geogebru forritið sem nemendur fá að skoða er myndræn lýsing á verkefninu. Það má sleppa því að hafa það með, en það er gagnvirk leið til að fá nemendur til að fá tilfinningu fyrir því hvernig snertill lítur út. Tvö gagnvirk gröf eru í forritinu. Það fyrra má sjá á mynd C.1. Nemendur geta fært sleðann á grafinu fyrir t og t_x til og nýtt sér það til að sjá hvað gerist þegar t_x nálgast t.

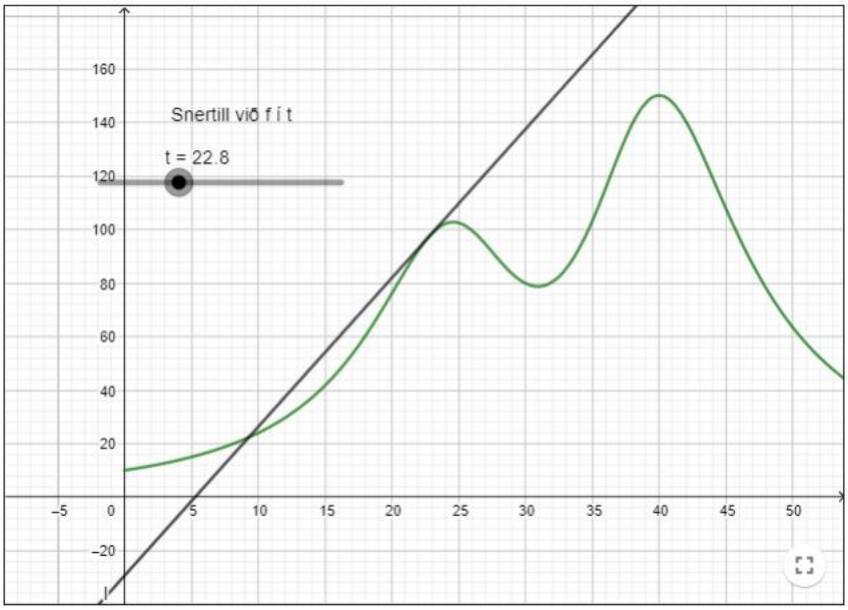
Seinna grafið má sjá á mynd C.2. Nemendur geta á grafinu fært sleðann fyrir t til og séð hvernig snertill við f í t breytist þegar t breytist.

Mynd C.1: Gagnvirkt graf með verkefni 1



Grafið sýnir sniðil við fallið f sem liggur um punktana $(t, f(t))$ og $(t_x, f(t_x))$. Hægt er að færa sleðana á myndinni til að breyta gildum á t og t_x.

Mynd C.2: Annað gagnvirkt graf með verkefni 1



Grafið sýnir snertil við fallið f í t. Hægt er að færa sleðana á myndinni til að breyta gildi á t.

C.5.2. Tillaga að framvindu seinni kennslustundar

Gefið nemendum í kringum 20 mínútur til að leysa verkefnið. Farið síðan yfir niðurstöður nemenda á svipaðan hátt og í fyrri kennslustund.

Dæmi um spurningar:

- Gefið nemanda töflutússpenna og fáið hann til að raða hallatölunum $h_{m_{35}}, h_{m_{45}}, \ldots, h_{m_{40,01}}$ í vaxandi röð. Hægt er að biðja fleiri hópa að gera það samtímis. Biðjið um að rökstyðja röðunina.

- Hver er hallatala snertils fallsins í $(40, f(40))$? Hvernig fannstu það út?

- Gastu fundið annan punkt á grafinu þar sem snertill í þeim punkti hefur hallatöluna 0? Ef svo er, nefndu einn. (Síðan er hægt að spyrja annan nemanda þangað til enginn getur nefnt fleiri slíka punkta.)

- Hvernig myndir þú lýsa fyrir vin hvernig hann finnur hallatölu snertils við fallið í punkti x_0? Myndir þú (annar nemandi) vilja bæta einhverju við lýsinguna?

- Í dæminu um hraða bíls, hvað sagðir þú að $h_x = 0$ táknaði? Getur þú lýst því hvernig þið komust að þeirri niðurstöðu?

- Í dæminu um virði fyrirtækis, hvað sagðir þú að $h_x > 0$ táknaði? Hvernig komust þið að þeirri niðurstöðu?

- Tókuð þið eftir einhverju varðandi sambands milli hallatölu snertils í punkti og grafi fallsins sem þið tókuð ekki eftir í fyrri hluta verkefnisins?

- Hvaða spurningar vakti verkefnið hjá ykkur?

C.5.3. Frá sjónarhorni TRU rammans

Verkefnið er hér skoðað út frá spurningum TRU rammans í töflu 2.1.

- Efnistök
  Markmið kennslustundarinnar er að byggja upp myndrænan skilning á diffrun með hjálp snertla.
  Nemendur eiga að nota fyrri þekkingu á hallatölu lína og fallgildum til að mynda skilning á diffrun.

- Vitsmunalegar kröfur
  Nemendur fá 25 mínútur í fyrri kennslustund og 20 mínútur í seinni kennslustund til að hugsa.
  Ef nemendur eru fastir og komast ekki áfram í verkefninu, ræða hópafélagarnir saman og ef enginn getur komið með hugmynd um hvernig á að halda áfram geta þeir spurt kennarann.
  Krafist er rökstuðnings í verkefninu og útskýringum á hugsun. Allir hópar eru spurðir út í sína úrlausn og þar hafa nemendur tækifæri til að greina frá sinni lausnarleið til viðbótar við að skila henni á blaði. Ef kennarinn tekur eftir því að einn nemandi er að skrifa allar lausnir hópsins, getur hann beðið annan nemanda um útkýringar svo allir fái tækifæri til að útskýra eigin hugsun.

- Einstaklingsmiðun
  Hóparnir eru þriggja manna, ásamt einum til tveimur tveggja manna hópum ef fjöldi nemenda er ekki margfeldi af þremur, til að hámarka möguleika á að hver og einn nemandi taki virkan þátt (Liljedahl, 2020).
  Allir hópar eru spurðir út í svörin sín, og ekki alltaf sami nemandi úr hverjum hópi. Þannig er hvatt til þess að allir taki þátt í að leysa verkefnið og móti þannig hugsun sína til að geta tekið þátt í umræðum og svarað spurningum kennara og samnemenda síðar í kennslustundinni.

- Skuldbinding, áræðni og sjálfsmynd
  Hóparnir eru litlir til að hvetja til þess að allir fái að segja frá eigin hugmyndum, enginn ætti að týnast í hópnum. Allir eru spurðir út í svörin sín, þar sem hugmyndir eru ræddar og skoðaðar með öllum bekknum.
  Unnið er áfram með svör nemenda á þann hátt að þau eru rædd með hópnum í lok tímans.

- Leiðsagnarmat
  Einkunn er ekki gefin fyrir verkefnið heldur er farið yfir verkefnið með öllum bekknum í lok tímans. Úrvinnslan með öllum bekknum er matið sem nemendurnir fá. Verkefnið er byggt þannig upp að svör hópa eru skoðuð eftir hvern tíma svo í seinni hluta verkefnisins er hægt að nýta sér ábendingar kennara og bekkjarfélaga úr fyrri hluta. Allt þetta er gert í von um að dýpka skilning nemenda.

C.5.4. Aukaverkefni

Forkröfur
Verkefni 1 og kunna að mæla eigin púls eða vera með púlsmæli.

Tæki og tól
Blað, blýjantur, reglustika, rúðustrikað blað, blað til að fylla út og ef til vill púlsmælir.

Hópastærð
Tveggja manna hópar, ef fjöldi nemenda er ekki slétt tala skal hafa einn þriggja manna hóp.

Markmið
Markmið verkefnisins er að æfa nemendur í að teikna gröf út frá mældum gögnum og byggja upp skilning á því hvað graf falls og snertill við fall getur sagt til um niðurstöðuna.

Tillaga að framvindu kennslustundar
Skiptið nemendum í tveggja manna hópa og látið hvern hóp fá tvær töflur fyrir púlsmælingu (tafla A.1.1) og skeiðklukku. Útskýrið fyrir hópunum:

- Hvernig á að fylla út í töfluna. Nánari lýsing er í töflu C.1.
- Hvaða hreyfingu þeir eiga að gera (hreyfingin gæti verið hlaup, hopp, sipp, armbeygjur eða ákveðin í samvinnu við íþróttakennara)
- Að eftir að hafa fyllt út töfluna eiga þeir að teikna graf með tíma á x-ás og púls á y-ás á rúðustrikað blað og merkja það með $y = f(x)$.
- Að svara eigi spurningunum samhliða því sem grafið er teiknað.

Hvernig fyllt er út í töfluna:
Nemendur fara út með blað, blýjant og skeiðklukku og annar aðili í hverju pari tekur tímann og skrifar á meðan hinn hleypur og tekur púlsinn. Skráningin í töfluna fer þannig fram að Nemandi 1 tekur púls og segir Nemanda 2 sem skrifar. Nemandi 2 lætur vita á 10 sekúndna fresti. Tafla C.1 lýsir því nánar hvernig púlsmælingin fer fram.

Tafla C.1: Framkvæmd hreyfingar og púlsmælingar

Tími (sek)	Aðgerð	Tími (sek)	Aðgerð
1-10	Taka púls	11-20	Hreyfing
21-30	Taka púls	31-40	Hreyfing
41-50	Taka púls	51-60	Hreyfing
61-70	Taka púls	71-80	Hreyfing
81-90	Taka púls	91-100	Hreyfing
101-110	Taka púls	111-120	Hvíld
121-130	Taka púls	131-140	Hvíld
141-150	Taka púls	151-160	Hvíld
161-170	Taka púls	171-180	Hvíld
181-190	Taka púls	190	Hvíld

C.6. Verkefni 2

Forkröfur
Verkefni 1 eða sömu forkröfur og voru í verkefni 1 ásamt því að vita hvernig maður finnur hallatölu snertils.

Tæki og tól
Blað með verkefnalýsingu, tússtafla og töflutússpennar.

Hópastærð
Skiptið nemendum í þriggja manna hópa. Ef fjöldi nemenda er ekki margfeldi af þremur, skal hafa einn til tvo tveggja manna hópa.

Markmið
Markmið verkefnisins er að fá nemendur til að átta sig sjálfir á því hvernig veldisföll eru diffruð.

C.6.1. Tillaga að framvindu kennslustundar

Dreifið blöðunum til nemenda eða skrifið stutta lýsingu á töflu. Ef verkefni 2 er ekki tekið með verkefni 1 borgar sig að kynna verkefnið fyrst og fullvissa sig um að nemendur kunni að reikna hallatölu snertils. Verkefnið er byggt upp með hugsandi skólastofu (Liljedahl, 2017) í huga. Skiptið tússtöflu (eða krítartöflu eða öðrum lóðréttum áskrifanlegum fleti) kennslustofunnar niður þannig að hver hópur hefur hluta af töflunni. Gefið nemendum 30 mínútur til að leysa verkefnið á tússtöflunni. Nýtið afgang kennslustundarinnar í að fara yfir verkefnið með nemendum. Biðjið nemendur um að skoða spurningu 1 hjá hinum hópunum. Biðjið hóp um að útskýra lausn annars hóps. Gefið síðan hópnum tækifæri á að útskýra eitthvað í eigin lausn sem þeim fannst ekki nægilega vel útskýrt. Ef það eru fleiri lausnir sem áhugavert væri að skoða sérstaklega, gerið þá það sama fyrir þær lausnir. Endurtakið síðan fyrir spurningu 2-4.

C.6.2. Frá sjónarhorni TRU rammans

Verkefnið er hér skoðað út frá spurningum TRU rammans í töflu 2.1.

- Efnistök
  Markmið kennslustundarinnar er að leiða út án aðstoðar kennara hver afleiða veldisfalla er. Þá hafa nemendur kynnst afleiðu veldisfalla sjálfir áður en farið

er að reikna dæmi í kennslubók.
Efni verkefnisins er diffrun veldisfalla. Nemendur eiga fyrir tímann að kannast við hugtakið diffrun og vita hvernig diffrun tengist hallatölu snertils. Verkefnið er leyst myndrænt og byggist á hallatölum snertla, sem áður hefur verið unnið með.

- Vitsmunalegar kröfur
Nemendur fá 30 mínútur til að hugsa á meðan á kennslustund stendur.
Nemendur eru að vinna í hópum til að þurfa að ræða við félaga við úrlausn verkefnisins. Ef enginn í hópnum getur fundið leið til að halda áfram, þá hafa nemendurnir möguleika á að spyrja kennara eða félaga úr öðrum hópi.
Krafist er rökstuðnings í verkefninu og útskýringum á hugsun. Verkefnið krefst ekki utanbókarlærdóms, nemendur eiga að reyna að mynda eigin skilning og útskýra eigin hugsun.

- Einstaklingsmiðun
Hóparnir eru þriggja manna, ásamt einum til tveimur tveggja manna hópum ef fjöldi nemenda er ekki margfeldi af þremur, til að hámarka möguleika á að hver og einn nemandi taki virkan þátt (Liljedahl, 2020). Verkefnin eru unnin á lóðréttum fleti svo það er auðveldara fyrir kennara að fylgjast með vinnu hvers hóps en ef þeir væru að vinna á blaði. Kennari getur því tekið betur eftir ef einhver fær ekki að taka þátt og spurt þann nemanda sérstaklega út í eigin hugsun.
Hóparnir eru litlir svo erfitt sé að forðast það að taka þátt. Allir hópar eru spurðir út í svörin sín, og ekki alltaf sami nemandi úr hverjum hópi. Þannig á hópurinn ekki að komast upp með það að einn leysi verkefnið því allir verða að skilja til að geta svarað spurningum.

- Skuldbinding, áræðni og sjálfsmynd
Verkefnið er hópavinna svo nemendur fái tækifæri til að ræða hugmyndir sínar innan hóps. Vinna á lóðréttum fletum sem auðvelt er að stroka út af á að hvetja til umræðu og fá nemendur til að gefast síður upp ef verkefnið er erfitt (Liljedahl, 2020)
Allir hópar eru spurðir út í svörin sín og hugmyndir þeirra eru ræddar og skoðaðar með öllum bekknum. Þegar farið er í að leysa önnur dæmi í diffrun getur kennarinn nýtt sér svör nemenda til að útskýra næstu skref í diffrun eða koma með ábendingar.

- Leiðsagnarmat
Einkunn er ekki gefin fyrir verkefnið heldur er farið yfir verkefnið með öllum bekknum í lok tímans. Umræðan á að hjálpa nemendum að dýpka skilning með því að útskýra sjálfir og rökræða eigin svör og svör annarra.

C.7. Verkefni 3

Forkröfur
Verkefni 1 og Verkefni 2 ásamt að þekkja rúmmál og yfirborðsflatarmál kassa. Ef verkefni 1 og 2 eru ekki tekin eru forkröfur að þekkja rúmmál og yfirborðsflatarmál kassa ásamt afleiðu veldisfalla og afleiðu summu og margfeldis.

Tæki og tól
Blað með verkefnalýsingu, A4 blöð, reglustika. Hver hópur þarf einn síma, tölvu eða annað tæki þar sem hægt er að opna eftirfarandi hlekk af Geogebru: `https://www.geogebra.org/m/e5bf8m5c`.

Hópastærð
Skiptið nemendum í þriggja manna hópa. Ef fjöldi nemenda er ekki margfeldi af þremur, skal hafa einn til tvo tveggja manna hópa.

Markmið
Markmið verkefnisins er að sýna nemendum dæmi um hvernig hægt er að nota diffrun með því að fá þá til að leysa bestunardæmi. Það er gert í von um að það kveiki áhuga nemenda á að halda áfram að skoða hvað hægt er að finna út með diffrun.

C.7.1. Tillaga að framvindu kennslustundarinnar

Áður en byrjað er á verkefninu er því lýst að markmiðið er að búa til sem stærstan kassa með ferningslaga botnflöt úr A4 blaði. Áður en byrjað er á að dreifa verkefninu til nemenda skal biðja hópana um að velta eftirfarandi hlutum fyrir sér í 5-10 mínútur:

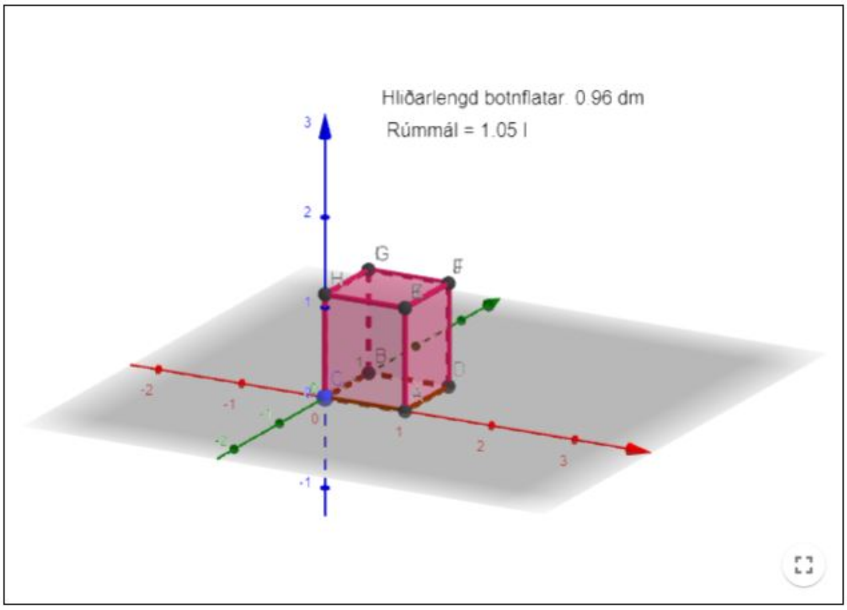
Gerum ráð fyrir að kassinn hafi ferningslaga botnflöt að stærð $x \cdot x$ og hæð y.

1. Finnið gildi sem x og y geta ómögulega tekið. Hvers vegna?
2. Hvert er minnsta gildi sem x getur tekið? En stærsta?
3. Hvert er minnsta gildi sem y getur tekið? En stærsta?
4. Hvort haldið þið að í svarinu sé $x > y$, $x < y$ eða $x = y$? Hvers vegna?

Dreifið síðan verkefninu til nemenda og gefið þeim 20-30 mínútur til að leysa það. Endið síðan á að fara yfir niðurstöður nemenda með nemendum.

Geogebra
Geogebru forritið sem nemendur fá að vinna með í lok verkefnis 3 er gagnvirk mynd af ferstrendingi með ferningslaga botnflöt þar sem hægt er að færa punktinn A til að sjá hvernig það breytir rúmmáli ferstrendingsins (sjá mynd C.3 og mynd C.4). Hóparnir geta nýtt sér forritið til að bera saman sínar niðurstöður við ólík gildi á A.

Mynd C.3: Gagnvirkt graf með verkefni 3



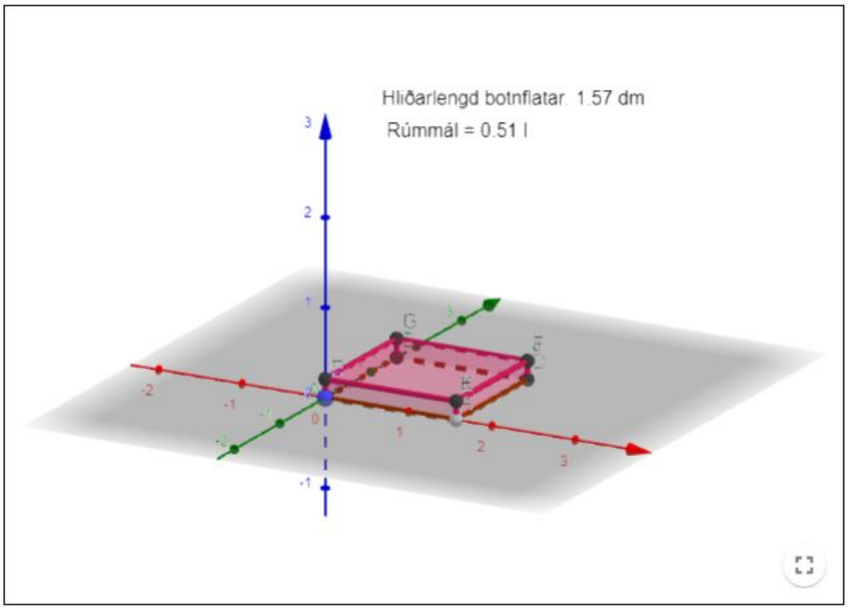
Myndin sýnir ferstrending með ferningslaga botnflöt þar sem hægt er að færa punktinn A til að fylgjast með rúmmálsbreytingunni.

Frá sjónarhorni TRU rammans Verkefnið er hér skoðað út frá spurningum TRU rammans í töflu 2.1.

- Efnistök
  Markmið kennslustundarinnar er að fá nemendur til að sjá notagildi í diffrun með því að láta þá reikna dæmi sem er áþreifanlegt.
  Efni verkefnisins er hámörkunardæmi. Það notar niðurstöður úr verkefni 2 um diffrun veldisfalla til að finna afleiðu og aðferðir úr verkefni 1 til að teikna snertla.

- Vitsmunalegar kröfur
  Nemendur fá 25-35 mínútur til að leysa verkefnið áður en farið er í sameiginlega úrvinnslu. Lengdin fer eftir því hvernig hópunum miðar.
  Ef sérhver nemandi í hópnum hefur enga hugmynd um hvernig þeir eiga að

Mynd C.4: Gagnvirkt graf með verkefni 3 eftir færslu á A



Hér má sjá sama ferstrending og á mynd C.3 en hér hefur punkturinn A verið færður.

halda áfram, þá geta þeir spurt kennara til að fá aðstoð við að halda áfram með verkefnið.
Nemendur eru látnir velta verkefninu fyrir sér áður en þeir byrja að leita að stærsta mögulega flatarmáli. Þeir þurfa að sýna útreikninga, ekki bara að skrifa svarið. Nemendur eru að vinna í hópum til að þurfa að ræða við félaga og útskýra eigin hugsun.

- Einstaklingsmiðun
  Hver og einn nemandi fær að taka þátt í hópavinnunni því hóparnir eru litlir. Hóparnir eru þriggja manna, ásamt einum til tveimur tveggja manna hópum ef fjöldi nemenda er ekki margfeldi af þremur, til að hámarka möguleika á að hver og einn nemandi taki virkan þátt (Liljedahl, 2020). Einnig eru nemendurnir spurðir út í svör sín svo ef einhver er ekki að fá að taka jafnmikinn þátt í verkefninu og hinir í hópnum er hægt að beina úrvinnsluspurningum að honum. Hóparnir eru litlir svo enginn geti týnst í fjöldanum. Allir hópar eru spurðir út í svörin sín, og ekki alltaf sami nemandi úr hverjum hópi. Þannig á hópurinn ekki komast upp með það að einn leysi verkefnið því allir verða að skilja til að geta svarað spurningum.

- Skuldbinding, áræðni og sjálfsmynd
  Hóparnir eru litlir til að hvetja til þess að allir fái að segja frá eigin hugmyndum, enginn ætti að týnast í hópnum. Allir eru spurðir út í svörin sín, þar sem

hugmyndir eru ræddar og skoðaðar með öllum bekknum.
Þegar nemendur segja frá svörum sínum í úrvinnslu, þá eru þau rædd með bekknum og borin saman við svör hinna. Þannig er unnið áfram með svör nemenda þangað til allir eru sammála.

- Leiðsagnarmat
  Einkunn er ekki gefin fyrir verkefnið heldur er farið yfir verkefnið með öllum bekknum í lok tímans. Úrvinnslan með öllum bekknum er matið sem nemendurnir fá. Með þessari úrvinnslu er gert ráð fyrir að nemendur fái tækifæri til að öðlast dýpri skilning með því að rökræða við samnemendur um lausnir, heyra hugmyndir annarra og deila sínum eigin hugmyndum með hinum.

D. Fjöldi framhaldsskólaeininga í stærðfræði til stúdentsprófs

Hér á eftir kemur listi af þeim bóknámsbrautum sem boðið er upp á í framhaldsskólum á Íslandi, fjölda framhaldsskólaeininga til stúdentsprófs og fjölda framhaldsskólaeininga sem skylda er að taka í stærðfræði á þeim brautum. Flestir skólanna bjóða nemendum upp á að taka fleiri framhaldsskólaeiningar í stærðfræði sem val. Upplýsingarnar voru sóttar af heimasíðu hvers skóla sumarið 2021.

Skóli	**Bóknámsbraut til stúdentsprófs**	**Feiningar til stúdentsprófs**	**Feiningar í stærðfræði**
Borgarholtsskóli	Félags- og hugvísindabraut	200	10
	Náttúrufræðibraut	200	35
	Viðskipta- og frumkvöðlabraut	200	20
Fjölbrautaskólinn í Breiðholti	Félagsvísindabraut	200	15
	Íþróttabraut	200	15
	Náttúruvísindabraut	200	25
	Opin braut	200	15
	Tölvubraut	200	35
Fjölbrautaskólinn í Garðabæ	Alþjóðabraut	202	5
	Félagsvísindabraut	202	10
	Íþróttabraut	202	10
	Náttúrufræðibraut	202	25
	Viðskiptabraut	202	20
Fjölbrautaskólinn við Ármúla	Félagsfræðibraut	200	5
	Hugvísindabraut	200	5
	Íþrótta- og heilbrigðisbraut	200	10
	Náttúrufræðibraut	200	25
	Viðskipta- og hagfræðibraut	200	20
Fjölbrautaskóli Norðurlands vestra	Félagsvísindabraut	200	10
	Fjölgreinabraut	200	10
	Hestabraut	212	10
	Náttúruvísindabraut	200	25

Skóli	**Bóknámsbraut til stúdentsprófs**	**Feiningar til stúdentsprófs**	**Feiningar í stærðfræði**
Fjölbrautaskóli Snæfellinga	Félags- og hugvísindabraut	200	10
	Íþróttabraut	200	10
	Náttúru- og raunvísindabraut	200	30
	Nýsköpunar- og frumkvöðlabraut	200	10
	Opin braut	200	10
Fjölbrautarskóli Suðurlands	Alþjóðalína	200	25
	Félagsgreinalína	200	15
	Íþróttalína	200	15
	Náttúrufræðilína	200	30
	Opin lína	200	15
	Viðskipta- og hagfræðilína	200	30
Fjölbrautaskóli Suðurnesja	Félagsvísindabraut	200	10
	Fjölgreinabraut	200	10
	Íþrótta- og lýðheilsubraut	200	10
	Listnámsbraut	200	10
	Raunvísindabraut	200	25
	Tölvufræðibraut	200	25
Fjölbrautaskóli Vesturlands	Félagsfræðabraut	200	10
	Náttúrufræðabraut	200	25
	Opin stúdentsbraut	200	10
Flensborg	Félagsvísindabraut	200	10
	Opin námsbraut	200	10
	Raunvísindabraut	200	25
	Viðskipta- og hagfræðibraut	200	15
Framhaldsskólinn á Húsavík	Félags- og hugvísindabraut	201	10
	Náttúruvísindabraut	201	30
	Opin stúdentsbraut	201	10
Framhaldsskólinn á Laugum	Félagsvísindabraut	200	5
	Íþróttafræðibraut	200	5
	Kjörsviðsbraut	200	5
	Náttúruvísindabraut	200	25
Framhaldsskólinn í Austur-Skaftafellssýslu	Hug- og félagsvísindabraut	200	15
	Náttúru- og raunvísindabraut	200	25
	Kjörnámsbraut	200	10
Framhaldsskólinn í Mosfellsbæ	Félags- og hugvísindabraut	200	15
	Opin stúdentsbraut	200	15
	Náttúruvísindabraut	200	30
Framhaldsskólinn í Vestmannaeyjum	Stúdentsbraut	200	15

Skóli	**Bóknámsbraut til stúdentsprófs**	**Feiningar til stúdentsprófs**	**Feiningar í stærðfræði**
Kvennaskólinn í Reykjavík	Náttúruvísindabraut	200	25
	Hugvísindabraut	200	10
	Félagsvísindabraut	200	10
Menntaskólinn á Akureyri	Félagsgreinabraut	200	15
	Heilbrigðisbraut	200	25
	Kjörnámsbraut	200	10
	Mála- og menningarbraut	200	15
	Náttúrufræðibraut	200	30
	Raungreinabraut	200	40
Menntaskólinn á Ásbrú	Stúdentspróf í tölvuleikjagerð	200	20
Menntaskólinn á Egilsstöðum	Félagsgreinabraut	206	10
	Náttúrufræðibraut	206	20
	Opin braut	200	10
Menntaskólinn á Ísafirði	Félagsvísindabraut	200	10
	Náttúruvísindabraut	200	15
	Opin stúdentsprófsbraut	200	10
Menntaskólinn að Laugarvatni	Félags- og hugvísindabraut	200	10
	Náttúruvísindabraut	200	23
Menntaskólinn á Tröllaskaga	Félags- og hugvísindabraut	200	10
	Íþróttabraut	200	10
	Kjörnámsbraut	200	10
	Listabraut	200	10
	Náttúruvísindabraut	200	25
Menntaskóli Borgarfjarðar	Félagsfræðabraut	200	10
	Íþróttabraut - náttúrufræðisvið	200	10
	Íþróttabraut - náttúrufræðisvið	200	16
	Náttúrufræðibraut	200	28
	Opin braut	200	10
Menntaskólinn í Kópavogi	Félagsgreinabraut	202	10
	Opin braut	202	10
	Raungreinabraut	202	25
	Viðskiptabraut	202	25
Menntaskólinn í Reykjavík	Eðlisfræðideild I	216	51
	Eðlisfræðideild II	211	46
	Náttúrufræðideild I	212	39
	Náttúrufræðideild II	213	35
	Fornmáladeild I	214	10
	Fornmáladeild II	210	10
	Nýmáladeild I	209	10
	Nýmáladeild II	209	10

Skóli	**Bóknámsbraut til stúdentsprófs**	**Feiningar til stúdentsprófs**	**Feiningar í stærðfræði**
Menntaskólinn við Hamrahlíð	Félagsfræðabraut	205	10
	Málabraut	205	10
	Náttúrufræðibraut	205	35
	Opin braut	205	10
Menntaskólinn við Sund	Félagsfræði- og sögulína	206	15
	Hagfræði- og stærðfræðilína	206	30
	Líffræði og efnafræðilína	206	25
	Eðlisfræði og stærðfræðilína	206	40
Tækniskólinn	Hönnunar- og nýsköpunarbraut	201	20
	K2: Tækni- og vísindaleið	210	35
	Náttúrufræðibraut	200	30
	Skipstjórn	227	20
	Tölvubraut	200	25
Verkmenntaskóli Austurlands	Félagsvísindabraut	200	20
	Náttúruvísindabraut	200	30
	Nýsköpunar og tæknibraut	200	10
	Opin stúdentsbraut	200	10
Verkmenntaskólinn á Akureyri	Félags- og hugvísindabraut	200	15
	Íþrótta- og lýðheilsubraut	200	15
	Náttúruvísindabraut	200	35
	Viðskipta- og hagfræðibraut	200	20
Verzlunarskóli Íslands	Alþjóðabraut	207	15
	Náttúrufræðibraut - eðlisfræðilína	207	40
	Náttúrufræðibraut - líffræðilína	207	35
	Nýsköpunar- og listabraut	207	15
	Viðskiptabraut	207	20

Heimildir

Lög um persónuvernd og vinnslu persónuupplýsinga nr. 90/2018.

Ali, A. (2012). Brain > Book > Buddy > Boss. *Try This Teaching*. `https://www.trythisteaching.com/2012/05/brain-book-buddy-boss/`.

Anna Helga Jónsdóttir, Eggert Briem, Freyja Hreinsdóttir, Freyr Þórarinsson, Jón Ingólfur Magnússon og Rögnvaldur G Möller (2014). Úttekt á stærðfræðikennslu í framhaldsskólum. Mennta- og menningamálaráðuneitið.

Anna Helga Jónsdóttir, Freyja Hreinsdóttir, Guðrún Geirsdóttir, Rögnvaldur G. Möller og Gunnar Stefánsson (2013). Könnunarpróf nýnema í stærðfræði við Háskóla Íslands - Niðurstöður og forspárgildi. *Tímarit um menntarannsóknir*, 10:11–28. `https://timarit.is/page/6689403?iabr=on#page/n19/mode/2up`.

Arnór Bjarki Svarfdal (2020). *Stytting námstíma til stúdentsprófs : viðhorf og reynsla háskólanema*, [meistararitgerð]. Háskóli Íslands, Reykjavík. `http://hdl.handle.net/1946/37191`.

Ball, D. L. og Bass, H. (2003). Making Mathematics Reasonable in School. *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics*, bls. 27–44.

Barnes, M. (2000). 'Magical' Moments in Mathematics: Insights into the Process of Coming to Know. *For the Learning of Mathematics*, 20(1):33–43. Publisher: FLM Publishing Association.

Björk, L. E. og Brolin, H. (2001). *Stærðfræði 3000 - Föll og deildun*. Mál og menning, Reykjavík.

Björk, L. E., Brolin, H., Eliasson, L. og Ljungström, L.-F. (1983). *Matematik - Gymnasieskolans treåriga linje*. AB Kopia, Stockholm.

Black, P. og Harrison, C. (2010). Formative assessment in science. *Good Practice in Science Teaching: What Research Has to Say*, bls. 183–210. 2 útgáfa.

Black, P., Harrison, C., Lee, C., Marshall, B. og Wiliam, D. (2004). Working inside the Black Box: Assessment for Learning in the Classroom. *Phi Delta Kappan*, 86(1):8–21.

Boaler, J. (2015). *Mathematical Mindsets: Unleashing Students' Potential through Creative Math, Inspiring Messages and Innovative Teaching.* John Wiley & Sons.

Boaler, J. og Brodie, K. (2004). The Importance, Nature and Impact of Teacher Questions. *Proceedings of the twenty-sixth annual meeting, North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, bls. 774–782. Ontario Instittute for Studies in Education of the University of Toronto, Toronto.

Burkill, J. (1978). *A First Course in Mathematical Analysis.* Cambridge University Press.

Butler, R. (1988). Enhancing and Undermining Intrinsic Motivation: The Effects of Task-Involving and Ego-Involving Evaluation on Interest and Performance. *British Journal of Educational Psychology*, 58(1):1–14.

Csíkszentmihályi, M. (1990). *Flow: The psychology of optimal experience.* Harper and Row.

de Guzmán, M., Hodgson, B. R., Robert, A. og Villani, V. (1998). Difficulty in the passage from secondary to tertiary education. *Documenta Mathematica*, 3:747–762. `https://www.mat.ulaval.ca/fileadmin/mat/documents/bhodgson/HodgsonEtc_ICM_1998.pdf`.

Drageset, O. G. (2015). Different types of student comments in the mathematics classroom. *The Journal of Mathematical Behavior*, 38:29–40.

Fara, P. (1999). Catch a falling apple: Isaac Newton and myths of genius. *Endeavour*, 23(4):167–170. `http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0160932799800404`.

Franke, M. L. og Kazemi, E. (2001). Learning to Teach Mathematics: Focus on Student Thinking. *Theory Into Practice*, 40(2):102–109. `http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1207/s15430421tip4002_4`.

Gerring, J. (2009). The Case Study: What it is and What it Does. *The Oxford Handbook of Comparative Politics.* `https://www.oxfordhandbooks.com/view/10.1093/oxfordhb/9780199566020.001.0001/oxfordhb-9780199566020-e-4`.

Good, T. L., Slavings, R. L., Harel, K. H. og Emerson, H. (1987). Student Passivity: A Study of Question Asking in K-12 Classrooms. *Sociology of Education*, 60(3):181–199. `https://www.jstor.org/stable/2112275`.

Gíslason, I. og Kristinsdóttir, B. (2018). Hvatt til hugsunar í stærðfræði. *Flatarmál*, (1):24–25. `https://skolathraedir.is/2019/11/15/hvatt-til-hugsunar-i-staerdfraedi/`.

Guðjónsson, B., Guðnason, G. og Pétursson, Y. (2015). *Stærðfræði handa 5. bekk náttúrufræðibrautar.* Menntaskólinn í Reykjavík, 2 útgáfa.

Hiebert, J. (2003). What research says about the NCTM standards. *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics*, bls. 5–23.

Háskóli Íslands (2021). Reglur um inntökuskilyrði í grunnnám. *Háskóli Íslands.* `https://www.hi.is/haskolinn/reglur_um_inntokuskilyrdi_i_grunnnam`.

Háskólinn í Reykjavík (2021). Verkfræði. *Háskólinn í Reykjavík.* `https://www.ru.is/grunnnam/verkfraedi/`.

Hubbard, J. H. og Hubbard, B. B. (2009). *Vector Calculus, Linear Algebra, and Differential Forms.* Matrix Editions, 4 útgáfa. Chapter 1.7.

Humenberger, H. (2000). Applicable mathematics. *Mathematics Education-Selected Results of a Viennese Research Project. International Journal for Mathematics Teaching and Learning*, 2(2).

Ingileif Oddsdóttir (2020). *Stytting námstíma til stúdentsprófs: Aðdragandi, stefnumótun og framkvæmd*, [meistararitgerð]. Háskóli Íslands. `http://hdl.handle.net/1946/36970`.

Irvine, W. B. (2015). *Aha!: The Moments of Insight that Shape Our World.* Oxford University Press.

Jacobs, G. M., Lee, C. og Ng, M. (1997). Cooperative Learning in the Thinking Classroom:. bls. 22, Singapore.

Jón Hilmar Jónsson (2005). Stóra orðabókin um íslenska málnotkun. *Stóra orðabókin um íslenska málnotkun.*

Katrín Blöndal og Sigríður Halldórsdóttir (2013). Úrtök og úrtaksaðferðir í eigindlegum rannsóknum. Halldórsdóttir, S., editor, *Handbók í aðferðafræði rannsókna*, bls. 129–136. Háskólinn á Akureyri, Akureyri.

Kluger, A. N. og DeNisi, A. (1996). The Effects of Feedback Interventions on Performance: A Historical Review, A Meta-Analysis, and a Preliminary Feedback Intervention Theory. *Psychological Bulletin*, 119(2):254–284.

Krummheuer, G. (1993). *The Ethnography of Argumentation.* Occasional paper: Institut für Didaktik der Mathematik. Institut für Didaktik der Mathematik.

Lester, F. K. og Lambdin, D. V. (2007). Undervisa genom problemlösning. *Lära och undervisa i matematik. Internationella perspektiv.*, bls. 95–108.

Ólöf Sighvatsdóttir (2019). *Fagleg og árangursrík stærðfræðikennsla - Handbók*, [meistararitgerð]. Háskóli Íslands, Reykjavík.

Liljedahl, P. (2005). AHA!: THE effect and affect of mathematical discovery on undergraduate mathematics students.

Liljedahl, P. (2017). Building a Thinking Classroom in Math. *Edutopia.* `https://www.edutopia.org/article/building-thinking-classroom-math`.

Liljedahl, P. (2020). *Building Thinking Classrooms in Mathematics, Grades K-12: 14 Teaching Practices for Enhancing Learning.* SAGE Publications, Thousand Oaks, United States.

Liljendahl, P. G. (2004). *The AHA! Experience: Mathematical Contexts, Pedagogical Implications*, [doktorsritgerð]. Simon Fraser University, Canada.

Lockhart, P. (2012). *Measurements.* The Belknap Press of Harvard University Press, Cambridge.

McNeal, B. (1995). Learning Not to Think in a Textbook-Based Mathematics Class. *Journal of Mathematical Behavior*, 14(2):205–234.

Mennta- og menningamálaráðuneytið, editor (2011). *Aðalnámskrá framhaldsskóla.* Reykjavik, 2. útgáfa febrúar 2012 útgáfa.

Mennta- og menningarmálaráðuneytið (2013). *Aðalnámskrá grunnskóla.*

Menntamálastofnun (2016). Spurningar og álitamál um námsbrautir. *Menntamálastofnun.* `https://mms.is/spurningar-og-alitamal-um-namsbrautir`.

National Research Council (2000). *How People Learn: Brain, Mind, Experience, and School.* National Academies Press, Washington, D.C. bls 164.

Neuhauser, C. og Roper, M. L. (2018). *Calculus for Biology and Medicine.* Pearson, Boston, 4th útgáfa.

Piaget, J. (1937). *La construction du réel chez l'enfant.* Collection d'actualités pédagogiques. Delachaux & Niestlé, Neuchâtel.

Piaget, J. (1974). *Success and Understanding.* Routledge, Oxon.

Pitt, H. (1994). John Charles Burkill. `https://royalsocietypublishing.org/doi/pdf/10.1098/rsbm.1994.0028`.

Rigelman, N. R. (2007). Fostering mathematical thinking and problem solving: The teacher's role. *Teaching Children Mathematics*, 13(6):308–314. `https://pubs.nctm.org/view/journals/tcm/13/6/article-p308.xml`.

Rop, C. J. (2002). The meaning of student inquiry questions: A teacher's beliefs and responses. *International Journal of Science Education*, 24(7):717–736. `http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/09500690110095294`.

Rosenfeld, M. (2015). Am I Ever Going to Use the Concepts of Differentiation and Integration in My Life? *Quora*. `https://www.quora.com/Am-I-ever-going-to-use-the-concepts-of-differentiation-and-integration-in-my-life/answer/Meni-Rosenfeld`.

Roy, R. (2011). *Sources in the Development of Mathematics: Series and Products from the Fifteenth to the Twenty-first Century*. Cambridge University Press.

Sadler, D. R. (1998). Formative Assessment: revisiting the territory. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice*, 5(1):77–84. `http://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/0969595980050104`.

Schoenfeld, A., Dosalmas, A., Fink, H., Sayavedra, A., Tran, K., Weltman, A., Zarkh, A. og Zuniga-Ruiz, S. (2019). Teaching for Robust Understanding with Lesson Study. Huang, R., Takahashi, A. og da Ponte, J. P., editors, *Theory and Practice of Lesson Study in Mathematics*, bls. 135–159. Springer International Publishing, Cham.

Schoenfeld, A. H. (2015). Teaching for Robust Understanding of Essential Mathematics. *Essential mathematics for the next generation: What and how students should learn*, bls. 104–129.

Schoenfeld, A. H. (2021). Alan H. Schoenfeld | Graduate School of Education. *Graduate School of Education*. `https://gse.berkeley.edu/alan-h-schoenfeld`.

Schoenfeld, A. H., Floden, R., El Chidiac, F., Gillingham, D., Fink, H., Hu, S., Sayavedra, A., Weltman, A. og Zarkh, A. (2018). On Classroom Observations. *Journal for STEM Educ Res*, 1(1-2):34–59. `http://link.springer.com/10.1007/s41979-018-0001-7`.

Schoenfeld, A. H. og the Teaching for Robust Understanding Project (2016). An Introduction to the Teaching for Robust Understanding (TRU) Framework. *TRU Framework*. `https://truframework.org/wp-content/uploads/2018/03/Introduction-to-TRU-2018-version.pdf`.

Sierpinska, A. (1994). *Understanding in Mathematics*. Taylor & Francis Group, London.

Sigurlína Davíðsdóttir (2013). Eigindlegar eða megindlegar rannsóknaraðferðir? Sigríður Halldórsdóttir, editor, *Handbók í aðferðafræði rannsókna*, bls. 229–237. Háskólinn á Akureyri, Akureyri.

Skemp, R. R. (1978). Relational Understanding and Instrumental Understanding. *The Arithmetic Teacher*, 26(3):9–15. `http://www.jstor.com/stable/41187667`.

Slavin, R. E. og Madden, N. A. (2010). *PowerTeaching Cooperative Learning Handbook*. Success for All Foundation, Baltimore, MD.

Stefán Jökulsson (2012). *Læsi – Ritröð um grunnþætti menntunar.* Námsgagnastofnun, Reykjavík.

Stein, S. (1999). *Archimedes: What Did He Do Beside Cry Eureka?* MAA.

Swan, M. (2005). *Improving learning in mathematics: challenges and strategies.* Department for Education and Skills Standards Unit, Nottingham.

Tekkumru Kisa, M. og Stein, M. K. (2015). Learning to See Teaching in New Ways: A Foundation for Maintaining Cognitive Demand. *American Educational Research Journal*, 52(1):105–136. https://doi.org/10.3102/0002831214549452.

Tellis, W. M. (1997). Application of a Case Study Methodology. *The Qualitative Report*, 3(3):1–19. http://nsuworks.nova.edu/tqr/vol3/iss3/1.

Teodoro, S. D., Donders, S., Kemp-Davidson, J., Robertson, P. og Schuyler, L. (2011). Asking Good Questions: Promoting Greater Understanding of Mathematics Through Purposeful Teacher and Student Questioning. *CJAR*, 12(2):18–29.

Tomlinson, C. A. (2014). *The Differentiated Classroom : Responding to the Needs of All Learners.* 2 útgáfa.

Weinberg, A., Wiesner, E., Benesh, B. og Boester, T. (2012). Undergraduate students' self-reported use of mathematics textbooks. *PRIMUS*, 22(2):152–175. http://www.tandfonline.com/doi/abs/10.1080/10511970.2010.509336.

West, R. og Pearson, J. C. (1994). Antecedent and Consequent Conditions of Student Questioning: An Analysis of Classroom Discourse. *Communication Education*, 43(4):299–311.

Yackel, E. og Cobb, P. (1996). Sociomathematical Norms, Argumentation, and Autonomy in Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27(4):458–477. https://www.jstor.org/stable/749877.