„Common Slot Lemma“ í K-teoríu Milnors módúló p yfir kroppa með kennitölu p

Grímur Hjörleifsson

60 eininga ritgerð sem er hluti af
Magister Scientiarum gráðu í stærðfræði

Leiðbeinandi
Dr. Jón Kristinn Arason

Prófdómari
Dr. Reynir Axelsson

Raunvísindadeild
Verkfræði- og náttúruvísindasvið
Háskóli Íslands
Reykjavík, maí 2010

„Common Slot Lemma“ í K-teoríu Milnors módúló p yfir kroppa með kennitölu p
„Common Slot Lemma“ í K-teoríu Milnors
60 eininga ritgerð sem er hluti af *Magister Scientiarum* gráðu í stærðfræði

Raunvísindadeild
Verkfræði- og náttúruvísindasvið
Háskóli Íslands
VR-II, Hjarðarhagi 2-6
107 Reykjavík
Sími: 525 4000

Skráningarupplýsingar:
Grímur Hjörleifsson, 2010, *„Common Slot Lemma“ í K-teoríu Milnors módúló p yfir kroppa með kennitölu p*, meistararitgerð, Verkfræði- og náttúruvísindasvið, Háskóli Íslands, 19 bls.

Prentun: Pixel ehf.
Reykjavík, maí 2010

Útdráttur

Þekkt er að ef F er kroppur með kennitölu 2 gildir í $k_2F = K_2F/2K_2F$, annari Milnor K-grúpu F módúló 2, fyrir $a_1, a_2, b_1, b_2 \in F^*$ með $l(a_1)l(a_2) = l(b_1)l(b_2)$ að til er stak $e \in F^*$ þannig að $l(a_1)l(a_2) = l(a_1)l(e)$ og $l(b_1)l(b_2) = l(b_1)l(e)$. Ofangreind setning gildir hins vegar ekki almennt í K_2F/pK_2F fyrir kroppa með kennitölu p þegar p er frábrugðið 2. Ennfremur er ekki til einföld alhæfing á setningunni fyrir slíka kroppa.

Abstract

It is well known that if F is a field with characteristic 2, then, for elements $a_1, a_2, b_1, b_2 \in F^*$ such that $l(a_1)l(a_2) = l(b_1)l(b_2)$ in $k_2F = K_2F/2K_2F$, the second Milnor K-group over F modulo 2, there exists an element $e \in F^*$ with $l(a_1)l(a_2) = l(a_1)l(e)$ and $l(b_1)l(b_2) = l(b_1)l(e)$ in k_2F. This theorem, however, does not generally hold in K_2F/pK_2F for fields with characteristic p if p is not 2. Furthermore, no simple generalization of the theorem exists for such fields.

Efnisyfirlit

Þakkir

Bestu þakkir fá leiðbeinandi minn, Jón Kristinn Arason, fyrir stuðning og leiðsögn og prófdómari, Reynir Axelsson, fyrir yfirlestur og gagnrýni. Ragnar Sigurðsson fær kærar þakkir fyrir að koma til bjargar á ögurstund. Ennfremur herbergisfélagar mínir og samnemendur á Tæknigarði fyrir félagsskap, geðvernd og kaffi.

Helgu Ingimundardóttur og Þorbjörgu Ágústsdóttur kann ég bestu þakkir fyrir LaTeX-hjálp (sem og Oddgeiri Guðmundssyni, þó hann hafi ekki vitað af því.) Fjölskyldu og vinum þakka ég fyrir hlýhug og þolinmæði.

Og síðast en ekki síst vil ég þakka Guðrúnu G Björnsdóttur fyrir allt.

Reykjavík, maí 2010
Grímur Hjörleifsson

1. Inngangur

Látum F vera kropp með kennitölu frábrugðna 2. Lengi hefur verið vitað (sjá t.d. [2], Lemma 1.7) að fyrir n-föld Pfister-form $\langle\langle a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n\rangle\rangle$, $\langle\langle b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n\rangle\rangle$ yfir kropp F þannig að $\langle\langle a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n\rangle\rangle \cong \langle\langle b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n\rangle\rangle$ gildir að til er $e \in F$ þannig að $\langle\langle a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, a_n\rangle\rangle \cong \langle\langle a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, e\rangle\rangle$ og $\langle\langle b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, b_n\rangle\rangle \cong \langle\langle b_1, b_2, \ldots, b_{n-1}, e\rangle\rangle$. Sér í lagi gildir þegar $n = 2$ að

$$\langle\langle a_1, a_2\rangle\rangle = \langle\langle a_1, e\rangle\rangle = \langle\langle b_1, e\rangle\rangle = \langle\langle b_1, b_2\rangle\rangle. \tag{1.1}$$

í I^2 fyrir eitthvert $e \in F$ þar sem I^n (eða $I^n(F)$) er hlutgrúpan í Witt-baugnum $W(F)$ sem spönnuð er af n-földum, tvílínulegum Pfister formum. Sama gildir þá í I^2/I^3. Þessi setning, einkum í þeirri mynd sem hún birtist í (1.1), gengur gjarnan undir nafninu *Common Slot Lemma*, hér eftir stytt CSL.

Látum þá $(a_1, a_2), (b_1, b_2)$ vera tvær fertalnaalgebrur yfir F þannig að $(a_1, a_2) \cong (b_1, b_2)$. Vegna vel þekktra tengsla slíkra fertalnaalgebra við ferningsform og þar sem tvöföld Pfister-form yfir kropp F eru ferningsform ef kennitala F er ekki 2 gildir CSL líka fyrir slíkar fertalnaalgebrur, það er að segja til er $e \in F$ þannig að $(a_1, a_2) \cong (a_1, e) \cong (b_1, e) \cong (b_1, b_2)$. (Þessa setningu má líka sanna út frá [1], sjá til dæmis [7], bls. 73.)

Einnig er sýnt í [9] (Thm. 4.1) að fyrir kropp F með kennitölu frábrugðna 2 er I^2/I^3 einsmóta $k_2F = K_2F/2K_2F$, annari Milnor K-grúpu F módúló 2 (sjá skilgreiningu í [9], grein 1, og [6], bls. 495) svo í k_2F yfir slíka kroppa gildir CSL líka: Fyrir $a_1, a_2, b_1, b_2 \in F^*$ með $l(a_1)l(a_2) = l(b_1)l(b_2)$ má finna $e \in F^*$ þannig að $l(a_1)l(a_2) = l(a_1)l(e) = l(b_1)l(e) = l(b_1)l(b_2)$.

Í [3] er sannað (Lemma 4) að fyrir tvöföld Pfister-form yfir kropp F gildir (1.1) líka ef kennitala kroppsins er 2. Pfister-form yfir slíka kroppa eru ekki kvaðratísk form heldur samhverf, tvílínuleg form þannig að þessi niðurstaða gefur ekki af sér CSL fyrir fertalnaalgebrur. Hins vegar er samkvæmt [6] $k_2(F) = K_2F/2K_2F$ einsmóta I^2/I^3 þegar kennitala F er 2 (Prop. 1) svo þar með fæst að CSL gildir líka fyrir Milnor K-teoríu módúló 2 þegar kennitala kroppsins er 2.

Látum þá F vera kropp með kennitölu $p > 2$ og $k_nF = K_nF/pK_nF$. Af ofansögðu vaknar sú spurning hvort CSL gildir líka í k_2F fyrir slíka kroppa, það er að segja hvort eftirfarandi gildir í k_2F:

> Látum F vera kropp með kennitölu $p > 2$ og $a_1, a_2, b_1, b_2 \in F^*$ þannig að $l(a_1)l(a_2) = l(b_1)l(b_2)$. Til er stak $e \in F^*$ þannig að $l(a_1)l(a_2) = l(a_1)l(e)$ og $l(b_1)l(b_2) = l(b_1)l(e)$.

Í þessari ritgerð er sýnt að til eru kroppar þar sem CSL gildir ekki. Enn fremur er sýnt að ekki dugir að bæta við stuðlum eða breyta röð staka sem skipt er út til að fá útgáfu af CSL sem gildir almennt fyrir slíka kroppa eins og nánar verður útskýrt síðar.

2. CSL í k_2F

Vekjum athygli á nokkrum forsendum og staðreyndum sem einatt eru notaðar í framhaldinu án þess þeirra sé sérstaklega getið.

Látum F vera kropp með kennitölu $p \neq 0$ og rifjum upp að F^p er kroppur p-tu velda af stökum F. Látum K_nF vera n-tu Milnor K-grúpuna yfir F og $k_nF = K_nF/pK_nF$.[1]

Stök $a_1, a_2, \ldots, a_n \in F$ kallast p-háð ef útvíkkunin $F^p(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ á kroppi p-tu velda staka í F er af stigi lægra en p^n en p-óháð ella. Þetta þýðir að $u, v \in F$ eru p-óháð ef $u \notin F^p(v)$ (eða, jafngilt, $v \notin F^p(u)$) en p-háð annars (sjá [8], bls. 269).

Látum $a_1, a_2, \ldots, a_n \in F^*$. Samkvæmt [5] (Thm. 2.1) er vörpunin frá n-tu K-grúpunni módúló p yfir í n-víð diffurform

$$\psi : k_n(F) \to \Omega^n(F), \qquad l(a_1)l(a_2)\ldots l(a_n) \mapsto \frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \frac{\mathrm{d}a_2}{a_2} \wedge \ldots \wedge \frac{\mathrm{d}a_n}{a_n}$$

eintæk svo við höfum einsmótun milli n-tu K-grúpunnar módúló p og hreinna lógaritmískra diffurforma af vídd n. Þar með getum við unnið með diffurform í stað stakanna í k_2F þannig að fyrir $a_1, a_2, b_1, b_2 \in F^*$ verður spurningin um hvenær $l(a_1)l(a_2) = l(b_1)l(b_2)$ í k_2F jafngild spurningunni um hvenær

$$\frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \frac{\mathrm{d}a_2}{a_2} = \frac{\mathrm{d}b_1}{b_1} \wedge \frac{\mathrm{d}b_2}{b_2}$$

í $\Omega^2(F)$.

Látum þá $a_1, a_2, b_1, b_2 \in F^*$ vera þannig að $l(a_1)l(a_2) = l(b_1)l(b_2)$ og a_1, a_2 séu p-háð. Þá er $\mathrm{d}a_1 \wedge \mathrm{d}a_2 = 0$ svo $l(a_1)l(a_2) = 0$ og þar sem $l(c)l(1) = 0$ fyrir öll $c \in F^*$ þá er

$$l(a_1)l(a_2) = l(a_1)l(1) = l(b_1)l(1) = l(b_1)l(b_2).$$

Tilfellið þegar a_1, a_2 eru p-háð er þannig fánýtt og við gerum því alltaf ráð fyrir hér eftir að a_1, a_2 séu p-óháð.

Athugum einnig að ef $l(a_1)l(a_2) = l(b_1)l(b_2)$ og a_1, a_2 eru p-óháð þá hefur það í för með sér að b_1, b_2 eru líka p-óháð.

Þegar rætt er um $F^p(a_1, a_2)$ er eðlilegi grunnurinn sem samanstendur af $a_1^i a_2^j$ fyrir $0 \leq i, j \leq p-1$ óhikað notaður án frekari málalenginga.

Útreikningar eru gerðir módúló p. Af því leiðir að við getum hafið í p-tu veldi lið fyrir lið. Einnig getum við tekið p-tu rætur summa af stökum í F^p lið fyrir lið.

Í framhaldinu verður okkur tíðrætt um „fastahluta“ staka $b \in F^p(a_1, a_2)$, en með því vísum við til stuðulsins við $a_1^0 a_2^0$ þegar b er skrifað með tilliti til grunnsins sem samanstendur af $a_1^i a_2^j$, $0 \leq i, j \leq p-1$. Í tilefni af því skilgreinum við F^p-línulegu vörpunina C með

[1] Við kjósum að fylgja [6], bls. 495, og [5], bls. 113, í skilgreiningu okkar á k_nF: Fyrir kropp F með kennitölu p er $k_nF = K_nF/pK_nF$ frekar en $k_nF = K_nF/2K_nF$ eins og oft er gert, t.d. í [9], bls. 327.

$$C : F^p(a_1, a_2) \to F^p, \qquad a_1^i a_2^j \mapsto \begin{cases} 1 \text{ ef } (i,j) = (0,0), \\ 0 \text{ annars} \end{cases}$$

og notum í framhaldinu.

2.1 Fyrstu skilyrði á b_1

Nú höfum við að fyrir $u, v \in F^*$ er $\mathrm{d}u \wedge \mathrm{d}v = 0$ í $\Omega^2(F)$ þ.þ.a.a. u og v séu p-háð í F, það er útvíkkunin $F^p(u, v)$ á kroppi p-tu velda staka í F sé af lægra stigi en p^2. Þar með á hið sama við í k_2F. Ef $u \notin F^p$ þýðir þetta að $l(u)l(v) = 0$ í k_2F þ.þ.a.a. $v \in F^p(u)$. Fyrir $u, v, w \in F^*$ þýðir þetta að $l(u)l(v) = l(u)l(w)$ í k_2F þ.þ.a.a. til sé stak $e \in F^p(u)$ þannig að $w = ev$.

Setning 1. *Gerum ráð fyrir $a_1, a_2, b_1, b_2 \in F^*$ þannig að a_1, a_2 séu p-óháð og $l(a_1)l(a_2) = l(b_1)l(b_2)$. Þá eru $b_1, b_2 \in F^p(a_1, a_2)$.*

Sönnun. Gerum ráð fyrir að forsendurnar í setningunni séu uppfylltar. Gerum einnig ráð fyrir $b_1 \notin F^p(a_1, a_2)$. Þá eru a_1, a_2, b_1 p-óháð og þá $\mathrm{d}a_1 \wedge \mathrm{d}a_2 \wedge \mathrm{d}b_1 \neq 0$. En nú er $\frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \frac{\mathrm{d}a_2}{a_2} = \frac{\mathrm{d}b_1}{b_1} \wedge \frac{\mathrm{d}b_2}{b_2}$ og þar sem $\frac{\mathrm{d}b_1}{b_1} \wedge \frac{\mathrm{d}b_2}{b_2} \wedge \mathrm{d}b_1 = 0$ er $\frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \frac{\mathrm{d}a_2}{a_2} \wedge \mathrm{d}b_1 = 0$ og því $\mathrm{d}a_1 \wedge \mathrm{d}a_2 \wedge \mathrm{d}b_1 = 0$ sem er mótsögn.

Þar með hlýtur $b_1 \in F^p(a_1, a_2)$ að gilda og með sama hætti má sýna að $b_2 \in F^p(a_1, a_2)$. □

Setning 2. *Gerum ráð fyrir $a_1, a_2, b_1, b_2 \in F^*$ þannig að a_1, a_2 séu p-óháð og gerum ráð fyrir að til sé $e \in F$ þannig að*

$$l(a_1)l(a_2) = l(a_1)l(e) = l(b_1)l(e) = l(b_1)l(b_2).$$

Ritum b_1 sem samantekt af $a_1^i a_2^j$, $0 \leq i, j \leq p-1$, yfir F^p. Þá eru stuðlarnir við $a_1^i = a_1^i a_2^0$ núll ef $i \neq 1$.

Sönnun. Gerum ráð fyrir að til séu $a_1, a_2, b_1, b_2, e \in F^*$ sem uppfylla skilyrði setningarinnar þannig að $l(a_1)l(a_2) = l(a_1)l(e) = l(b_1)l(e) = l(b_1)l(b_2)$ í k_2F. Athugum að þá er $b_1 \in F^p(a_1, a_2)$. Þá gefur fyrsta jafnaðarmerkið að til er $f \in F^p(a_1)$ þannig að $e = fa_2$ og annað jafnaðarmerkið gefur að til er $g \in F^p(e) = F^p(fa_2)$ þannig að $b_1 = ga_1$. Höfum þá að $g = \sum_{j=0}^{p-1} g_j^p f^j a_2^j$ með $g_j \in F$. Þar með fæst að $b_1 = ga_1 = \sum_{j=0}^{p-1} g_j^p f^j a_1 a_2^j$. Ef við skrifum b_1 sem F^p-línulega samantekt $\sum_{i,j=0}^{p-1} r_{ij}^p a_1^i a_2^j$ af grunnstökunum $a_1^i a_2^j$ með $0 < i, j < p-1$ og berum saman stuðlana sést að $r_{i0} = 0$ ef $i \neq 1$. □

2.2 Einfalt mótdæmi

Látum F vera kropp með kennitölu p þannig að p sé oddatala. Gerum ráð fyrir að til séu p-óháð stök $a_1, a_2 \in F^*$ og látum q vera þannig að $p = 2q - 1$. Þá er $2q = 1$ módúló p og þar með

$$\begin{aligned} l(a_1)l(a_2) &= 2ql(a_1)l(a_2) \\ &= l(a_1^2)l(a_2^q). \end{aligned}$$

Látum $b_1 = a_1^2$ og $b_2 = a_2^q$. Þá er stuðullinn við a_1^2 í b_1 ekki 0 og samkvæmt setningu 2 er þá ekki til stak $e \in F^*$ þannig að $l(a_1)l(a_2) = l(a_1)l(e)$ og $l(a_1^2)l(a_2^q) = l(a_1^2)l(e)$.

3. Mögulegar útvíkkanir á CSL

Athugum þá mögulegar leiðir til að útvíkka CSL fyrir kroppa með kennitölu 2 svo hún gildi fyrir kroppa með aðrar kennitölur.

Tvær augljósar leiðir til útvíkkunar eru að bæta við stuðlum og breyta röðinni sem stökunum er skipt út í. Spurningin verður því hvort fyrir gefin stök $a_1, a_2, b_1, b_2 \in F^*$ með $l(a_1)l(a_2) = l(b_1)l(b_2)$ sé hægt að finna stak $e \in F^*$ og stuðla α, β í $\mathbb{F}_p^*$ þannig að önnur hvor jafnan gildi:

$$\begin{aligned} l(a_1)l(a_2) &= \alpha l(a_1)l(e) = \beta l(b_1)l(e) = l(b_1)l(b_2), \\ l(a_1)l(a_2) &= \alpha l(e)l(a_2) = \beta l(e)l(b_2) = l(b_1)l(b_2), \end{aligned}$$

það er að segja hvort hægt sé að komast milli $l(a_1)l(a_2)$ og $l(b_1)l(b_2)$ í þremur skrefum þar sem hvert skref felst í því að skipta út einu staki, mögulega með stuðlum.

3.1 Fleiri skilyrði á b_1

Samkvæmt setningu 2 leiðir CSL fyrir $l(a_1)l(a_2) = l(b_1)l(b_2)$ þar sem $b_1 = \sum_{i,j=0}^{p-1} r_{ij}^p a_1^i a_2^j$ til þess að $r_{i0} = 0$ fyrir öll $i \neq 1$. Fyrir $C(b_1) = r_{00}$, „fastalið“ b_1, má raunar sanna sterkari niðurstöðu sem einnig gildir um $C(b_2)$:

Setning 3. *Látum $b_1, b_2 \in F^*$ vera þannig að $l(a_1)l(a_2) = l(b_1)l(b_2)$. Ritum b_1 og b_2 sem stök í $F^p(a_1, a_2)$. Þá er $C(b_1) = C(b_2) = 0$.*

Sönnum fyrst eftirfarandi hjálparsetningu:

Hjálparsetning 4. *Látum $a_1, a_2 \in F^*$ vera p-óháð og $b_1, b_2 \in F^p(a_1, a_2)$ vera þannig að $\frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \frac{\mathrm{d}a_2}{a_2} = \frac{\mathrm{d}b_1}{b_1} \wedge \frac{\mathrm{d}b_2}{b_2}$. Þá er $C(b_1 b_2) = 0$.*

Sönnun á hjálparsetningu. Látum a_1, a_2, b_1, b_2 vera þannig að skilyrðin í setningunni séu uppfyllt. Athugum að $\frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \frac{\mathrm{d}a_2}{a_2} = \frac{\mathrm{d}b_1}{b_1} \wedge \frac{\mathrm{d}b_2}{b_2}$ jafngildir

$$b_1 b_2 (\mathrm{d}a_1 \wedge \mathrm{d}a_2) = a_1 a_2 (\mathrm{d}b_1 \wedge \mathrm{d}b_2). \tag{3.1}$$

Þar sem a_1, a_2 eru p-óháð eru $\mathrm{d}a_1, \mathrm{d}a_2$ línulega óháð yfir $F^p(a_1, a_2)$ (sjá [8], bls. 184-185). Þar með er $\mathrm{d}b = \frac{\partial b}{\partial a_1}\mathrm{d}a_1 + \frac{\partial b}{\partial a_2}\mathrm{d}a_2$ fyrir $b \in F^p(a_1, a_2)$ og þá

$$\mathrm{d}b_1 \wedge \mathrm{d}b_2 = \left(\frac{\partial b_1}{\partial a_1}\frac{\partial b_2}{\partial a_2} - \frac{\partial b_1}{\partial a_2}\frac{\partial b_2}{\partial a_1} \right) \mathrm{d}a_1 \wedge \mathrm{d}a_2.$$

þar sem $\frac{\partial}{\partial a_i}$ eru formlegar hlutafleiður m.t.t. a_i og eru í $F^p(a_1, a_2)$. (Sömu niðurstöðu má einnig fá með beinum reikningum. Þar sem stuðlarnir við $a_1^i a_2^j$ eru í F^p og útreikningar fara fram módúló p leiðir $\mathrm{d}b = \frac{\partial b}{\partial a_1}\mathrm{d}a_1 + \frac{\partial b}{\partial a_2}\mathrm{d}a_2$ af skilgreiningunni á afleiðu.)

Þá verður (3.1) að

$$b_1 b_2(\mathrm{d}a_1 \wedge \mathrm{d}a_2) = a_1 a_2 \left(\frac{\partial b_1}{\partial a_1}\frac{\partial b_2}{\partial a_2} - \frac{\partial b_1}{\partial a_2}\frac{\partial b_2}{\partial a_1} \right) (\mathrm{d}a_1 \wedge \mathrm{d}a_2)$$

sem þýðir að

$$\begin{aligned} b_1 b_2 &= a_1 a_2 \left(\frac{\partial b_1}{\partial a_1}\frac{\partial b_2}{\partial a_2} - \frac{\partial b_1}{\partial a_2}\frac{\partial b_2}{\partial a_1} \right) \\ &= \left(a_1 \frac{\partial b_1}{\partial a_1} \right) \left(a_2 \frac{\partial b_2}{\partial a_2} \right) - \left(a_2 \frac{\partial b_1}{\partial a_2} \right) \left(a_1 \frac{\partial b_2}{\partial a_1} \right). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Skrifum nú $b_1 = \sum_\epsilon r_\epsilon^p a^\epsilon$ með $r_\epsilon \in F$ þar sem ϵ hleypur yfir öll pör af heiltölum (ϵ_1, ϵ_2) með $0 \le \epsilon_1, \epsilon_2 \le p-1$ og $a^\epsilon = a_1^{\epsilon_1} a_2^{\epsilon_2}$. Látum með sama hætti $b_2 = \sum_\delta s_\delta^p a^\delta$ þar sem δ hegðar sér eins og ϵ.

Þá er

$$\begin{aligned} a_1 \frac{\partial b_1}{\partial a_1} &= \sum_\epsilon \epsilon_1 r_\epsilon^p a^\epsilon, & a_2 \frac{\partial b_2}{\partial a_2} &= \sum_\delta \delta_2 s_\delta^p a^\delta, \\ a_2 \frac{\partial b_1}{\partial a_2} &= \sum_\epsilon \epsilon_2 r_\epsilon^p a^\epsilon, & a_1 \frac{\partial b_2}{\partial a_1} &= \sum_\delta \delta_1 s_\delta^p a^\delta \end{aligned}$$

og (3.2) verður

$$\begin{aligned} \sum_{\epsilon,\delta} r_\epsilon^p s_\delta^p a^\epsilon a^\delta &= \sum_{\epsilon,\delta} \epsilon_1 \delta_2 r_\epsilon^p s_\delta^p a^\epsilon a^\delta - \sum_{\epsilon,\delta} \epsilon_2 \delta_1 r_\epsilon^p s_\delta^p a^\epsilon a^\delta \\ &= \sum_{\epsilon,\delta} (\epsilon_1 \delta_2 - \epsilon_2 \delta_1) r_\epsilon^p s_\delta^p a^\epsilon a^\delta. \end{aligned}$$

Viljum nú sýna að „fastaliðurinn“ í $\sum_{\epsilon,\delta}(\epsilon_1\delta_2 - \epsilon_2\delta_1) r_\epsilon^p s_\delta^p a^\epsilon a^\delta$ sé núll. En þar sem $\epsilon_1 + \delta_1 \equiv 0$ og $\epsilon_2 + \delta_2 \equiv 0$, bæði módúló p, hefur í för með sér að $\epsilon_1\delta_2 - \epsilon_2\delta_1 \equiv 0$ módúló p fæst að ofangreindur fastaliður er núll. $\square$

Sönnun á setningu 3. Gerum ráð fyrir $a_1, a_2, b_1, b_2 \in F^*$ þannig að a_1 og a_2 séu p-óháð og $l(a_1)l(a_2) = l(b_1)l(b_2)$. Þar sem $l(a_1)l(a_2) = l(b_1)l(b_2)$ þ.þ.a.a. $\frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \frac{\mathrm{d}a_2}{a_2} = \frac{\mathrm{d}b_1}{b_1} \wedge \frac{\mathrm{d}b_2}{b_2}$ er þá $C(b_1 b_2) = 0$ samkvæmt hjálparsetningu 4.

Tökum nú $e \in F^p(b_2)^*$ og athugum að þá er $l(e)l(b_2) = 0$. Höfum þá

$$\begin{aligned} l(a_1)l(a_2) &= l(b_1)l(b_2) + l(e)l(b_2) \\ &= l(eb_1)l(b_2) \end{aligned}$$

og þar með $C(eb_1b_2) = 0$.

Veljum loks $e = b_2^{p-1}$ og fáum $C(b_1 b_2^p) = 0$, þ.e. $C(b_1)b_2^p = 0$. Þar sem b_2 er valið frábrugðið 0 þýðir þetta að $C(b_1) = 0$.

Af samhverfuástæðum fæst svo að $C(b_2) = 0$. $\square$

4. CSL fyrir $p = 3$

Látum í þessari efnisgrein F vera kropp með kennitölu $p = 3$.

4.1 Fjöldi mögulegra tilfella

Gerum ráð fyrir því að til sé $e \in F^*$ þannig að

$$l(a_1)l(a_2) = \alpha l(a_1)l(e) = \beta l(b_1)l(e) = l(b_1)l(b_2)$$

fyrir einhverja stuðla $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_3^*$. Athugum að þar sem einu stuðlarnir sem koma til greina eru ± 1 eru möguleikarnir fjórir:

$$l(a_1)l(a_2) = l(a_1)l(e) = l(b_1)l(e) = l(b_1)l(b_2), \tag{4.1}$$
$$l(a_1)l(a_2) = -l(a_1)l(e) = -l(b_1)l(e) = l(b_1)l(b_2), \tag{4.2}$$
$$l(a_1)l(a_2) = l(a_1)l(e) = -l(b_1)l(e) = l(b_1)l(b_2), \tag{4.3}$$
$$l(a_1)l(a_2) = -l(a_1)l(e) = l(b_1)l(e) = l(b_1)l(b_2). \tag{4.4}$$

En með því að setja $\overline{e} = e^{-1}$ fæst að $-l(a_1)l(e) = l(a_1)l(e^{-1}) = l(a_1)l(\overline{e})$ og eins fyrir aðra liði þar sem annar hvor stuðlanna er -1 svo (4.2) jafngildir (4.1) og (4.4) jafngildir (4.3). Þar með er í raun aðeins um tvo möguleika að ræða: $\alpha = \beta$ eða $\alpha \neq \beta$.

Gerum þá ráð fyrir því að til sé e þ.a.

$$l(a_1)l(a_2) = \alpha l(e)l(a_2) = \beta l(e)l(b_2) = l(b_1)l(b_2). \tag{4.5}$$

þ.e. að CSL gildi þar sem skipt er á fyrra staki. Þar sem $-l(r)l(s) = l(s)l(r)$ fyrir öll $r, s \in F$ er jafngilt (4.5) að

$$l(a_2)l(a_1) = \alpha l(a_2)l(e) = \beta l(b_2)l(e) = l(b_2)l(b_1),$$

svo CSL í fyrra staki fyrir $l(a_1)l(a_2) = l(b_1)l(b_2)$ jafngildir CSL í seinna staki fyrir $l(a_2)l(a_1) = l(b_2)l(b_1)$, en þar sem $l(r)l(s) = -l(s)l(r)$ eins og fyrr sagði eru þessar jöfnur jafngildar.

Þar með höfum við að fyrir $p = 3$ eru möguleikarnir á CSL alls fjórir.

4.2 Skilyrði á b_1, b_2 fyrir $p = 3$

Gerum ráð fyrir $a_1, a_2, b_1, b_2 \in F^*$ og $l(a_1)l(a_2) = l(b_1)l(b_2)$.

Skrifum b_1 sem stak í $F^3(a_1, a_2)$:

$$\begin{aligned} b_1 = r_{00}^3 + r_{01}^3 a_2 + r_{02}^3 a_2^2 + r_{10}^3 a_1 + r_{11}^3 a_1 a_2 \\ + \ r_{12}^3 a_1 a_2^2 + r_{20}^3 a_1^2 + r_{21}^3 a_1^2 a_2 + r_{22}^3 a_1^2 a_2^2 \end{aligned} \tag{4.6}$$

og gerum ráð fyrir að til séu stuðlar $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_3^*$ og $e \in F^*$ þannig að $l(a_1)l(a_2) = \alpha l(a_1)l(e) = \beta l(b_1)l(e) = l(b_1)l(b_2)$.

Skoðum nú stuðlana við $a_1^i a_2^0$-liðina í hvoru tilfelli um sig, þegar $\alpha = \beta$ og þegar $\alpha \neq \beta$.

Fyrir $\alpha = \beta$ er $r_{20} = 0$ og $r_{00} = 0$ samkvæmt setningum 2 og 3.

Ef aftur á móti $\alpha \neq \beta$, segjum $\alpha = 1, \beta = -1$, fæst

$$\begin{aligned} l(a_1)l(a_2) &= l(a_1)l(e) \\ &= -l(b_1)l(e) \\ &= 2l(b_1)l(e) \\ &= l(b_1^2)l(e) \end{aligned}$$

svo

$$l(a_1)l(a_2) = l(a_1)l(e) = l(b_1^2)l(e). \tag{4.7}$$

Nú er

$$\begin{aligned} b_1^2 = (&r_{00}^6 - r_{01}^3 r_{02}^3 a_2^3 - r_{10}^3 r_{20}^3 a_1^3 - r_{11}^3 r_{22}^3 a_1^3 a_2^3 - r_{12}^3 r_{21}^3 a_1^3 a_2^3) \\ +\ & a_2(-r_{00}^3 r_{01}^3 + r_{02}^6 a_2^3 - r_{10}^3 r_{21}^3 a_1^3 - r_{11}^3 r_{20}^3 a_1^3 - r_{12}^3 r_{22}^3 a_1^3 a_2^3) \\ +\ & a_2^2(-r_{00}^3 r_{02}^3 + r_{01}^6 - r_{10}^3 r_{22}^3 a_1^3 - r_{11}^3 r_{21}^3 a_1^3 - r_{12}^3 r_{20}^3 a_1^3) \\ +\ & a_1(-r_{00}^3 r_{10}^3 - r_{01}^3 r_{12}^3 a_2^3 - r_{02}^2 r_{11}^3 a_2^3 + r_{20}^6 a_1^3 - r_{21}^3 r_{22}^3 a_1^3 a_2^3) \\ +\ & a_1 a_2(-r_{00}^3 r_{11}^3 - r_{01}^3 r_{10}^3 - r_{02}^3 r_{12}^3 a_2^3 - r_{20}^3 r_{21}^3 a_1^3 + r_{22}^6 a_1^3 a_2^3) \\ +\ & a_1 a_2^2(-r_{00}^3 r_{12}^3 - r_{01}^3 r_{11}^3 - r_{02}^3 r_{10}^3 - r_{20}^3 r_{22}^3 a_1^3 + r_{21}^6 a_1^3) \\ +\ & a_1^2(-r_{00}^3 r_{20}^3 - r_{01}^3 r_{22}^3 a_2^3 - r_{02}^3 r_{21}^3 a_2^3 + r_{10}^6 - r_{11}^3 r_{12}^3 a_2^3) \\ +\ & a_1^2 a_2(-r_{00}^3 r_{21}^3 - r_{01}^3 r_{20}^3 - r_{02}^3 r_{22}^3 a_2^3 - r_{10}^3 r_{11}^3 + r_{12}^6 a_2^3) \\ +\ & a_1^2 a_2^2(-r_{00}^3 r_{22}^3 - r_{01}^3 r_{21}^3 - r_{02}^3 r_{20}^3 - r_{10}^3 r_{12}^3 + r_{11}^6). \end{aligned}$$

Með því að beita setningum 2 og 3 á jöfnu (4.7) fáum við að stuðullinn við a_1^2 og fastaliðurinn eiga báðir að vera 0 og þar sem við getum eins og fyrr sagði tekið þriðju rætur lið fyrir lið þar sem við á þýðir það að

$$-r_{01}r_{22}a_2 - r_{02}r_{21}a_2 + r_{10}^2 - r_{11}r_{12}a_2 = 0 \tag{4.8}$$

og

$$r_{01}r_{02}a_2 + r_{10}r_{20}a_1 + r_{11}r_{22}a_1a_2 + r_{12}r_{21}a_1a_2 = -C(b_1^2) = 0.$$

Sjáum einnig að ef b_2 er á sama hátt ritað sem stak í $F^3(a_1, a_2)$,

$$\begin{aligned} b_2 = s_{00}^3 + s_{01}^3 a_2 + s_{02}^3 a_2^2 + s_{10}^3 a_1 + s_{11}^3 a_1 a_2 \\ +\ s_{12}^3 a_1 a_2^2 + s_{20}^3 a_1^2 + s_{21}^3 a_1^2 a_2 + s_{22}^3 a_1^2 a_2^2, \end{aligned}$$

og gert ráð fyrir að til séu stuðlar α, β þ.a. $l(a_1)l(a_2) = \alpha l(e)l(a_2) = \beta l(e)l(b_2) = l(b_1)l(b_2)$ fyrir eitthvert $e \in F^*$, sem eins og fyrr sagði er jafngilt því að $l(a_2)l(a_1) = \alpha l(a_2)l(e) = \beta l(b_2)l(e) = l(b_2)l(b_1)$, þá þýðir það að sömu skilyrði séu á stuðlum b_2 og frá greinir að framan fyrir b_1. Athugum þó að vegna ólíkrar raðar á a_1, a_2 er samsvörunin á milli r_{ij} og s_{ji}, ekki milli r_{ij} og s_{ij}, þannig að skilyrðin fyrir b_2 verða $s_{00} = 0$, $s_{02} = 0$,

$$-s_{10}s_{22}a_1 - s_{20}s_{12}a_1 + s_{01}^2 - s_{11}s_{21}a_1 = 0 \tag{4.9}$$

og

$$s_{10}s_{20}a_1 + s_{01}s_{02}a_2 + s_{11}s_{22}a_2a_1 + s_{21}s_{12}a_2a_1 = 0.$$

4.3 Mótdæmi

Látum $a_1, a_2 \in F^*$ vera p-óháð. Setjum

$$\begin{aligned} b_1 &= a_2^2 + a_1a_2 + a_1^2 + a_1^2a_2, \\ b_2 &= a_1^3a_2^2 + a_1a_2^3 - a_1^2a_2^2. \end{aligned}$$

4.3.1 Jafngildi $l(a_1)l(a_2)$ og $l(b_1)l(b_2)$

Vitum að $l(a_1)l(a_2) = l(b_1)l(b_2)$ þ.þ.a.a.

$$\frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \frac{\mathrm{d}a_2}{a_2} = \frac{\mathrm{d}b_1}{b_1} \wedge \frac{\mathrm{d}b_2}{b_2},$$

það er að segja að ef $J(b_1, b_2)$ er Jacobi-ákveða b_1, b_2 m.t.t. a_1, a_2 þá er

$$\frac{1}{b_1b_2}J(b_1, b_2)\mathrm{d}a_1 \wedge \mathrm{d}a_2 = \frac{\mathrm{d}a_1}{a_1} \wedge \frac{\mathrm{d}a_2}{a_2}$$

sem jafngildir

$$J(b_1, b_2) = \frac{b_1b_2}{a_1a_2}.$$

Nú er

$$\frac{\partial b_1}{\partial a_1} = a_2 - a_1 - a_1a_2, \qquad \frac{\partial b_2}{\partial a_1} = a_2^3 + a_1a_2^2,$$
$$\frac{\partial b_1}{\partial a_2} = -a_2 + a_1 + a_1^2, \qquad \frac{\partial b_2}{\partial a_2} = -a_1^3a_2 + a_1^2a_2$$

svo

$$\begin{aligned} J(b_1, b_2) =& \frac{\partial b_1}{\partial a_1}\frac{\partial b_2}{\partial a_2} - \frac{\partial b_1}{\partial a_2}\frac{\partial b_2}{\partial a_1} \\ =& (a_2 - a_1 - a_1a_2)(-a_1^3a_2 + a_1^2a_2) \\ & - (-a_2 + a_1 + a_1^2)(a_2^3 + a_1a_2^2) \\ =& a_1^4a_2^2 + a_1^4a_2 - a_1^3a_2 - a_1^2a_2^3 + a_2^4. \end{aligned}$$

En nú er

$$\begin{aligned}\frac{b_1 b_2}{a_1 a_2} &= \frac{(a_2^2 + a_1 a_2 + a_1^2 + a_1^2 a_2)(a_1^3 a_2^2 + a_1 a_2^3 - a_1^2 a_2^2)}{a_1 a_2} \\ &= (a_2^2 + a_1 a_2 + a_1^2 + a_1^2 a_2)(a_1^2 a_2 + a_2^2 - a_1 a_2) \\ &= a_1^4 a_2^2 + a_1^4 a_2 - a_1^3 a_2 - a_1^2 a_2^3 + a_2^4.\end{aligned}$$

Þar með sést að fyrir $p = 3$ og a_1, a_2 p-óháð þá gildir fyrir

$$\begin{aligned} b_1 &= a_2^2 + a_1 a_2 + a_1^2 + a_1^2 a_2, \\ b_2 &= a_1^3 a_2^2 + a_1 a_2^3 - a_1^2 a_2^2 \end{aligned}$$

að $l(a_1)l(a_2) = l(b_1)l(b_2)$.

4.3.2 Nánari skoðun á b_1, b_2

Sýnum þá að b_1 og b_2 uppfylla ekki skilyrðin sem sett eru fram í grein 4.2.

Augljóslega eru stuðlarnir við a_1^2 í b_1 og a_2^2 í b_2 frábrugðnir 0. Sjáum einnig að sé stuðlunum stungið inn í (4.8) og (4.9) fæst

$$-r_{01}r_{22}a_2 - r_{02}r_{21}a_2 + r_{10}^2 - r_{11}r_{12}a_2 = -1$$

og

$$-s_{10}s_{22}a_1 - s_{20}s_{12}a_1 + s_{01}^2 - s_{11}s_{21}a_1 = a_1 a_2$$

sem hvorugt er jafnt 0 þannig að hvorki uppfyllir b_1 skilyrði (4.8) né b_2 skilyrði (4.9).

Það að skilyrðið sé ekki uppfyllt fyrir b_1 þýðir að ekki er til stak $e \in F^*$ og stuðlar $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_3^*$ þannig að $l(a_1)l(a_2) = \alpha l(a_1)l(e) = \beta l(b_1)l(e) = l(b_1)l(b_2)$ og að það sé ekki uppfyllt fyrir b_2 þýðir að ekki er til stak $e \in F^*$ og stuðlar $\alpha, \beta \in \mathbb{F}_3^*$ þannig að $l(a_1)l(a_2) = \alpha l(e)l(a_2) = \beta l(e)l(b_2) = l(b_1)l(b_2)$.

Þar með eru fundin stök $a_1, a_2, b_1, b_2 \in F^*$ þannig að engin þeirra útgáfa af CSL sem hér hafa verið skoðaðar gildi.

4.4 Uppspretta mótdæma

Látum $a_1, a_2, b_1, b_2 \in F^*$ og gerum ráð fyrir $l(a_1)l(a_2) = l(b_1)l(b_2)$. Skrifum sem fyrr

$$\begin{aligned} b_1 = r_{00}^3 + r_{01}^3 a_2 + r_{02}^3 a_2^2 + r_{10}^3 a_1 + r_{11}^3 a_1 a_2 \\ + \ r_{12}^3 a_1 a_2^2 + r_{20}^3 a_1^2 + r_{21}^3 a_1^2 a_2 + r_{22}^3 a_1^2 a_2^2, \\ b_2 = s_{00}^3 + s_{01}^3 a_2 + s_{02}^3 a_2^2 + s_{10}^3 a_1 + s_{11}^3 a_1 a_2 \\ + \ s_{12}^3 a_1 a_2^2 + s_{20}^3 a_1^2 + s_{21}^3 a_1^2 a_2 + s_{22}^3 a_1^2 a_2^2. \end{aligned}$$

Rifjum upp að samkvæmt grein 2 er $l(a_1)l(a_2) = l(b_1)l(b_2)$ þ.þ.a.a.

$$
\begin{aligned}
\sum_{\epsilon,\delta} r_\epsilon^p s_\delta^p a^\epsilon a^\delta &= \sum_{\epsilon,\delta} \epsilon_1\delta_2 r_\epsilon^p s_\delta^p a^\epsilon a^\delta - \sum_{\epsilon,\delta} \epsilon_2\delta_1 r_\epsilon^p s_\delta^p a^\epsilon a^\delta \\
&= \sum_{\epsilon,\delta} (\epsilon_1\delta_2 - \epsilon_2\delta_1) r_\epsilon^p s_\delta^p a^\epsilon a^\delta,
\end{aligned}
$$

það er

$$
\sum_{\epsilon_1,\epsilon_2,\delta_1,\delta_2=0}^{p-1} (1 - \epsilon_1\delta_2 + \epsilon_2\delta_1) r_{\epsilon_1\epsilon_2}^p s_{\delta_1\delta_2}^p a_1^{\epsilon_1+\delta_1} a_2^{\epsilon_2+\delta_2} = 0.
$$

Þetta jafngildir því að jöfnurnar

$$
\begin{aligned}
&r_{00}s_{00} + r_{02}s_{01}a_2 + r_{01}s_{02}a_2 + r_{20}s_{10}a_1 + r_{22}s_{11}a_1a_2 + r_{21}s_{12}a_1a_2 \\
&\qquad + r_{10}s_{20}a_1 + r_{12}s_{21}a_1a_2 + r_{11}s_{22}a_1a_2 = 0, \\
&r_{01}s_{00} + r_{00}s_{01} + r_{02}s_{02}a_2 + 2r_{21}s_{10}a_1 + 2r_{20}s_{11}a_1 + 2r_{22}s_{12}a_1a_2 = 0, \\
&r_{02}s_{00} + r_{01}s_{01} + r_{00}s_{02} + 2r_{12}s_{20}a_1 + 2r_{11}s_{21}a_1 + 2r_{10}s_{22}a_1 = 0, \\
&r_{10}s_{00} + 2r_{11}s_{02}a_2 + r_{00}s_{10} + 2r_{01}s_{12}a_2 + r_{20}s_{20}a_1 + 2r_{21}s_{22}a_1a_2 = 0, \\
&r_{11}s_{00} + 2r_{12}s_{02}a_2 + 2r_{01}s_{10} + r_{00}s_{11} + 2r_{20}s_{21}a_1 + r_{22}s_{22}a_1a_2 = 0, \\
&r_{12}s_{00} + 2r_{10}s_{02} + 2r_{01}s_{11} + r_{00}s_{12} + 2r_{22}s_{20}a_1 + r_{21}s_{21}a_1 = 0, \\
&r_{20}s_{00} + 2r_{22}s_{01}a_2 + r_{10}s_{10} + 2r_{12}s_{11}a_2 + r_{00}s_{20} + 2r_{02}s_{21}a_2 = 0, \\
&r_{21}s_{00} + 2r_{20}s_{01} + 2r_{11}s_{10} + r_{12}s_{12}a_2 + r_{00}s_{21} + 2r_{02}s_{22}a_2 = 0, \\
&r_{22}s_{00} + 2r_{21}s_{01} + r_{11}s_{11} + 2r_{10}s_{12} + 2r_{02}s_{20} + r_{00}s_{22} = 0
\end{aligned}
$$

séu uppfylltar. Ef við lítum á b_1 sem fasta, það er festum r_{ij}, má líta á þetta sem línulegt jöfnuhneppi með 9 jöfnum og 9 óþekktum stærðum s_{ij} þar sem $0 \leq i, j \leq 2$. (Reyndar eru óþekktu stærðirnar aðeins 8 þar sem við vitum að $s_{00} = 0$.) Athugum að $r_{00} = 0$ svo stuðlafylkið verður

$$
M = \begin{bmatrix}
0 & r_{02}a_2 & r_{01}a_2 & r_{20}a_1 & r_{22}a_1a_2 & r_{21}a_1a_2 & r_{10}a_1 & r_{12}a_1a_2 & r_{11}a_1a_2 \\
r_{01} & 0 & r_{02}a_2 & 2r_{21}a_1 & 2r_{20}a_1 & 2r_{22}a_1a_2 & 0 & 0 & 0 \\
r_{02} & r_{01} & 0 & 0 & 0 & 0 & 2r_{12}a_1 & 2r_{11}a_1 & 2r_{10}a_1 \\
r_{10} & 0 & 2r_{11}a_2 & 0 & 0 & 2r_{01}a_2 & r_{20}a_1 & 0 & 2r_{21}a_1a_2 \\
r_{11} & 0 & 2r_{12}a_2 & 2r_{01} & 0 & 0 & 0 & 2r_{20}a_1 & r_{22}a_1a_2 \\
r_{12} & 0 & 2r_{10} & 0 & 2r_{01} & 0 & 2r_{22}a_1 & r_{21}a_1 & 0 \\
r_{20} & 2r_{22}a_2 & 0 & r_{10} & 2r_{12}a_2 & 0 & 0 & 2r_{02}a_2 & 0 \\
r_{21} & 2r_{20} & 0 & 2r_{11} & 0 & r_{12}a_2 & 0 & 0 & 2r_{02}a_2 \\
r_{22} & 2r_{21} & 0 & 0 & r_{11} & 2r_{10} & 2r_{02} & 0 & 0
\end{bmatrix}. \tag{4.10}
$$

Nú er vel þekkt úr línulegri algebru að $M\mathbf{x} = \mathbf{0}$ hefur lausn $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ þ.þ.a.a. $\det(M) = 0$ og við getum valið stuðlana r_{ij} í b_1 þannig að svo sé. Að því búnu getum við fundið lausn á $M\mathbf{x} = \mathbf{0}$ sem gefur stuðlana s_{ij} í b_2.

Við viljum velja stuðla r_{ij} í b_1 þannig að þeir uppfylli hvorki $r_{20} = 0$ né (4.8), skilyrðin til að CSL gildi í seinna staki, og þannig að í lausnarrúmi jöfnunnar sé vigur sem gefur stuðlana s_{ij} í b_2 þannig að stuðlarnir uppfylli hvorki $s_{02} = 0$ né (4.9), skilyrðin til að CSL gildi í fyrra staki. Til þess nægir okkur til dæmis að velja

$$
\begin{aligned}
r_{00} &= 0, & r_{10} &= 0, & r_{20} &= 1, \\
r_{01} &= 0, & r_{11} &= 1, & r_{21} &= 1, \\
r_{02} &= 1, & r_{12} &= 0, & r_{22} &= 0
\end{aligned}
$$

sem gefur lausnarrúm spannað af vigrunum

$$
\begin{aligned}
\mathbf{x} &= [\, 0,\ 0,\ a_1,\ a_2,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ -1\,], \\
\mathbf{y} &= [\, 0,\ 0,\ a_1,\ 0,\ a_2,\ 0,\ a_2,\ 0,\ 0\,], \\
\mathbf{z} &= [\, 0,\ a_1a_2,\ 0,\ -a_1a_2,\ a_1a_2,\ a_1 - a_2,\ 0,\ 0,\ 0].
\end{aligned}
$$

Þá gefur **x** stuðla fyrir b_2 þannig að $l(a_1)l(a_2) = l(b_1)l(b_2)$ og eru þá b_1 og b_2 sömu stök og sýnt er í grein 4.3 að CSL gildi ekki fyrir.

4.5 CSL í sértilvikum

Hægt er að sýna að CSL gildi fyrir ákveðnar gerðir sértilvika: Látum $a_1, a_2, b_1, b_2 \in F^*$ vera þannig að $l(a_1)l(a_2) = l(b_1)l(b_2)$ og athugum að þá er $b_1 \in F^p(a_1, a_2)$. Skrifum

$$
\begin{aligned}
b_1 &= r_{00}^3 + r_{01}^3 a_2 + r_{02}^3 a_2^2 + r_{10}^3 a_1 + r_{11}^3 a_1 a_2 \\
&\quad + r_{12}^3 a_1 a_2^2 + r_{20}^3 a_1^2 + r_{21}^3 a_1^2 a_2 + r_{22}^3 a_1^2 a_2^2 \\
&= (r_{00}^3 + r_{10}^3 a_1 + r_{20}^3 a_1^2) + (r_{01}^3 + r_{11}^3 a_1 + r_{21}^3 a_1^2) a_2 \\
&\quad + (r_{02}^3 + r_{12}^3 a_1 + r_{22}^3 a_1^2) a_2^2
\end{aligned} \tag{4.11}
$$

og gerum ráð fyrir að $r_{i2} = 0$ fyrir öll i, það er að segja a_2^2 komi ekki fyrir í b_1. Höfum einnig samkvæmt fyrri útreikningum að $r_{00} = 0$.

Athugum nú að fyrir öll $r, s \in F$ er

$$
l(r)l(s) = 4l(r)l(s) = l(r^2)l(s^2)
$$

svo $C(b^2) = 0$, þ.e.

$$
r_{01}r_{02}a_2 + r_{10}r_{20}a_1 + r_{11}r_{22}a_1a_2 + r_{12}r_{21}a_1a_2 = 0
$$

en þar eð gert er ráð fyrir $r_{i2} = 0$ gefur þetta $r_{10}r_{20}a_1 = 0$, það er að segja $r_{10} = 0$ eða $r_{20} = 0$.

Einangrum a_2 í (4.11) og fáum

$$
a_2 = \frac{b_1 - (r_{10}^3 a_1 + r_{20}^3 a_1^2)}{r_{01}^3 + r_{11}^3 a_1 + r_{21}^3 a_1^2}.
$$

Setjum $B = \frac{1}{r_{01}^3 + r_{11}^3 a_1 + r_{21}^3 a_1^2} \in F^3(a_1)$. Gerum þá ráð fyrir $r_{20} = 0$ og fáum

$$
\begin{aligned}
a_2 &= \frac{b_1 - r_{10}^3 a_1}{r_{01}^3 + r_{11}^3 a_1 + r_{21}^3 a_1^2} \\
&= -Br_{10}^3 a_1 \left(1 - \frac{b_1}{r_{10}^3 a_1}\right).
\end{aligned}
$$

En þá fæst:

$$
\begin{aligned}
l(a_1)l(a_2) &= l(a_1)l\left(-Br_{10}^3a_1\left(1-\frac{b_1}{r_{10}^3a_1}\right)\right)\\
&= l(a_1)l(-Br_{10}^3a_1) + l(a_1)l\left(1-\frac{b_1}{r_{10}^3a_1}\right)\\
&= l(a_1)l\left(1-\frac{b_1}{r_{10}^3a_1}\right) \qquad (4.12)\\
&= l\left(b_1\frac{a_1}{b_1}\right)l\left(1-\frac{b_1}{r_{10}^3a_1}\right)\\
&= l(b_1)l\left(1-\frac{b_1}{r_{10}^3a_1}\right) + l\left(\frac{a_1}{b_1}\right)l\left(1-\frac{b_1}{r_{10}^3a_1}\right)\\
&= l(b_1)l\left(1-\frac{b_1}{r_{10}^3a_1}\right) - l\left(\frac{a_1}{b_1}\right)l\left(1-\frac{b_1}{r_{10}^3a_1}\right) + 3l(r_{10})l\left(1-\frac{b_1}{r_{10}^3a_1}\right)\\
&= l(b_1)l\left(1-\frac{b_1}{r_{10}^3a_1}\right) - l\left(\frac{b_1}{r_{10}^3a_1}\right)l\left(1-\frac{b_1}{r_{10}^3a_1}\right)\\
&= l(b_1)l\left(1-\frac{b_1}{r_{10}^3a_1}\right) \qquad (4.13)\\
&= l(b_1)l(b_2), \qquad (4.14)
\end{aligned}
$$

þar sem (4.12) gildir vegna $-Br_{10}^3a_1 \in F^3(a_1)$, en þá gefa (4.12), (4.13) og (4.14) að

$$l(a_1)l(a_2) = l(a_1)l\left(1-\frac{b_1}{r_{10}^3a_1}\right) = l(b_1)l\left(1-\frac{b_1}{r_{10}^3a_1}\right) = l(b_1)l(b_2).$$

Eins fæst að fyrir $r_{10} = 0$ með sambærilegum reikningum að

$$l(a_1)l(a_1) = l(a_1)l\left(1-\frac{b_1}{r_{20}^3a_1^2}\right) = -l(b_1)l\left(1-\frac{b_1}{r_{20}^3a_1^2}\right) = l(b_1)l(b_2).$$

Með sömu aðferðum má fá út að ef gert er ráð fyrir að $r_{i1} = 0$ fyrir öll i, það er að segja enginn liður b_1 innihaldi a_1^2, gildir CSL og stuðlasetningin fer eftir því hvort gert er ráð fyrir því að $r_{10} = 0$ eða $r_{20} = 0$.

CSL gildir því engu að síður fyrir stóra flokka staka í F þó ekki gildi hún almennt.

5. Opnar spurningar og vangaveltur

5.1 Skrefafjöldi

Við getum litið svo á að CSL feli í sér þrjú skref þar sem skipt er um eitt stak í hverju skrefi. Þá er eðlilegt að spyrja sig hvort verið geti að svipuð regla gildi en í fleiri skrefum. Skyldar niðurstöður hafa verið sannaðar í ámóta kerfum, sjá t.d. [14] (Cor. 2.7):

Setning 5. *Látum F vera kropp með kennitölu $p = 3$. Fyrir $a, b \in F$ látum við $[a, b)_p$ vera p-algebruna*

$$[a, b)_p = F[\, x, y \mid x^p - x = a,\ y^p = b,\ yxy^{-1} = x + 1\,].$$

Látum nú $a, b, a', b' \in F$. Ef $[a, b)_3 \cong [a', b')_3$ þá má finna $a_1, a_2 \in F$ og $b_1, b_2, b_3 \in F^*$ þannig að

$$[a, b) \cong [a, b_1) \cong [a_1, b_1) \cong [a_1, b_2) \cong [a_2, b_2) \cong [a_2, b_3) \cong [a', b_3) \cong [a', b'),$$

það er að segja hægt er að komast frá $[a, b)$ til $[a', b')$ í sjö skrefum.

Annað dæmi sem einnig er að mörgu leyti sambærilegt má finna í [13] (Cor. 2.2) þar sem kveikjan kemur úr fertalnaalgebrum:

Setning 6. *Látum $n = 3$ og F vera kropp sem inniheldur n-tu einingarót ζ. Fyrir $a, b \in F^*$ látum við (a, b) vera F-algebruna sem skilgreind er af*

$$\langle X, Y \mid X^n = a,\ Y^n = b,\ YX = \zeta XY \rangle.$$

Gerum ráð fyrir $(a, b) \cong (c, d)$. Þá eru til $e, f, g \in F^*$ þannig að

$$(a, b) \cong (a, e) \cong (f, e) \cong (f, g) \cong (c, g) \cong (c, d),$$

það er að segja ef $(a, b) \cong (c, d)$ þá er hægt að komast frá (a, b) til (c, d) í fimm skrefum.

Hins vegar verður sú nálgun sem beitt var í þessari rannsókn, þ.e. að nota diffurform og skrifa b_1 og b_2 sem stök í $F^p(a_1, a_2)$, fljótt afar flókin eftir því sem skrefunum fjölgar. Nýrrar nálgunar er því þörf til að kanna slíka hluti.

5.2 Skilyrði fyrir tilvist b_2

Látum F vera kropp með kennitölu p. Gerum ráð fyrir $a_1, a_2 \in F$ og $b_1 \in F^3(a_1, a_2)$. Látum einnig sem fyrr $C(b_1)$ vera „fastahluta“ b_1 (þ.e. stuðulinn við $a_1^0 a_2^0$).

Fyrir $p = 3$ höfum við út frá grein 4.4 (þar sem M er skilgreint með jöfnu (4.10)) að $C(b_1) = r_{00} = 0$ og $C(b_1^2) = 0$ eru nægjanleg skilyrði fyrir því að $\det(M) = 0$, það er til sé $b_2 \in F^3(a_1, a_2)$ þannig að $l(a_1)l(a_2) = l(b_1)l(b_2)$.

Fyrir $p = 2$ höfum við út frá sambærilegum reikningum við 4.4 að $C(b_1) = r_{00} = 0$ er nægjanlegt skilyrði fyrir því að til sé $b_2 \in F^2(a_1, a_2)$ þannig að $l(a_1)l(a_2) = l(b_1)l(b_2)$.

Er hægt að sýna eitthvað samsvarandi fyrir $p > 3$? Út frá sértilvikunum $p = 2$ og $p = 3$ væri ef til vill eðlilegt að setja fram eftirfarandi tilgátu:

> Látum F vera kropp með kennitölu p. Fyrir $a_1, a_2 \in F^*$ og $b_1 \in F^p(a_1, a_2)$ er til $b_2 \in F$ þannig að $l(a_1)l(a_2) = l(b_1)l(b_2)$ þ.þ.a.a. $C(b_1^i) = 0$ fyrir $1 < i < p - 1$.

Þessi tilgáta verður hins vegar ekki rannsökuð nánar hér.

A. K-teoría

A.1 Sögulegt ágrip

Rót K-teoríu fyrir kroppa liggur í ríkjafræði, nánar tiltekið Grothendieck-grúpunni K_0, sem sett var fram á sjötta áratug 20. aldar í tengslum við sönnun á Grothendieck-Riemann-Roch setningunni. Á næstu árum voru K_1 (Whitehead-grúpan) og K_2 skilgreindar en ekki var ljóst hvernig skilgreina bæri K_n fyrir hærri n. Nokkrar allólíkar skilgreiningar komu fram fyrir slíkar hærri K-grúpur en einna mestrar hylli hefur skilgreining Quillens frá 1972 (sjá t.d. [12]) notið.

Sú tegund K-teoríu sem hér er til umfjöllunar, K-teoría Milnors, var sett fram í [9] árið 1970 og eru Milnor K-grúpurnar frábrugðnar Quillen K-grúpunum fyrir $n > 2$. Hins vegar koma Milnor K-grúpurnar með náttúrulegum hætti við sögu í útgáfu Quillens (sjá [4]).

Undanfarið hefur K-teoría Milnors gengið í endurnýjun lífdaga, einkum vegna sönnunar Voevodskys og fleiri á Milnor-tilgátunum svokölluðu (sjá m.a. [9], [15], [10]) sem sýna fram á náið samband á milli samlagningar- og margföldunaruppbyggingar kropps F, Galois-grúpu hans Γ, ferningsforma yfir F, hjásvipfræði F og (Milnor) K-grúpa F (sjá [11], efnisgrein 3). Hafa þessar niðurstöður vakið að nýju áhuga á skilgreiningu Milnors á K-teoríu.

A.2 Grundvallaratriði K-teoríu

Skilgreiningin á K-teoríu Milnors og flestar þær reiknireglur sem notaðar eru í þessari grein birtust upphaflega í [9] og er eftirfarandi að mestu fengið þaðan.

Skilgreining 1. Látum F vera kropp. Setjum $K_1F := F^*$, margföldunargrúpu F með samlagningarrithætti og látum $l : F \to K_1F$ vera augljósu einsmótunina þannig að $l(ab) = l(a) + l(b)$.

Skilgreinum þá Milnor K-teoríuna yfir F, K_*F (eða $K_*(F)$), sem deildagrúpu þinalgebrunnar

$$(\mathbb{Z},\ K_1F,\ K_1F \otimes K_1F,\ K_1F \otimes K_1F \otimes K_1F,\ \ldots)$$

með íðalinu sem spannað er af öllum stökum af gerðinni $l(a) \otimes l(1-a)$ þar sem $a \neq 0$.

K_*F er þá stigaður baugur og við segjum að stökin af stigi n myndi n-tu Milnor K-grúpu F, K_nF (einnig oft ritað $K_n(F)$).

Með öðrum orðum er

$$K_*F = (K_0F,\ K_1F,\ K_2F,\ \ldots)$$

þar sem $K_0F = \mathbb{Z}$, $K_1F = F^*$ og fyrir $n \leq 2$ er K_nF n-falda þinfeldið, $K_nF = \bigotimes_{i=1}^{n} K_1F$, þar sem deilt er út hlutgrúpunni sem spönnuð er af $l(a_1) \otimes \ldots \otimes l(a_n)$ þar sem $a_i + a_{i+1} = 1$ fyrir eitthvert i.

Athugum að þegar rætt er um stökin í K_*F er þinfeldismerkinu yfirleitt sleppt og í stað $l(a) \otimes l(b)$ skrifað $l(a)l(b)$.

Skilgreining 2. Látum F vera kropp með kennitölu p. Skilgreinum $k_nF := K_nF/pK_nF$, n-tu Milnor K-grúpu F módúló p (einnig oft ritað $k_n(F)$).

Helstu reiknireglur sem notaðar eru í þessari ritgerð eru eftirfarandi:

Setning 7. *Látum $a, b, c \in F^*$ og $n \in \mathbb{Z}$. Í K_*F gilda eftirfarandi reiknireglur:*

(i) $l(ab) = l(a) + l(b)$,

(ii) $(l(a) + l(b))l(c) = l(a)l(c) + l(b)l(c)$,

(iii) $nl(a)l(b) = l(a^n)l(b) = l(a)l(b^n)$,

(iv) $l(a)l(b) = -l(b)l(a)$.

Sönnun. (i) Samkvæmt skilgreiningu á $l : F^* \to K_1F$ er $l(ab) = l(a) + l(b)$.

(ii) Af skilgreiningu á þinfeldi leiðir beint að

$$(l(a) + l(b))l(c) = l(a)l(c) + l(b)l(c).$$

(iii) Athugum fyrst að

$$0 = l(1)l(b) = l(aa^{-1})l(b) = (l(a) + l(a^{-1}))l(b)$$

svo $l(a)l(b) = -l(a^{-1})l(b)$.

Beitum síðan þrepun, athugum að $0 = l(1) = l(a^0)$ svo setningin er rétt fyrir $n = 0$. Gerum þá ráð fyrir að setningin gildi fyrir $n = m$, það er að segja $ml(a)l(b) = l(a^m)l(b)$. Þá er

$$\begin{aligned}(m+1)l(a)l(b) &= ml(a)l(b) + l(a)l(b)\\ &= l(a^m)l(b) + l(a)l(b)\\ &= l(a^{m+1})l(b)\end{aligned}$$

og setningin gildir fyrir $n = m + 1$.

Nákvæmlega eins er sannað að $nl(a)l(b) = l(a)l(b^n)$ og þar með er sýnt að setningin gildir fyrir öll $n \in \mathbb{Z}$.

(iv) Látum $a, b \in F$. Þar sem $-a = (1-a)/(1-a^{-1})$ fáum við

$$\begin{aligned}l(a)l(-a) &= l(a)l\left(\frac{1-a}{1-a^{-1}}\right)\\ &= l(a)l(1-a) - l(a)l(1-a^{-1})\\ &= l(a)l(1-a) + l(a^{-1})l(1-a^{-1})\\ &= 0.\end{aligned}$$

En þá fæst

$$\begin{aligned}l(a)l(b) + l(b)l(a) &= l(a)l(-a) + l(a)l(b) + l(b)l(a) + l(b)l(-b)\\ &= l(a)l(-ab) + l(b)l(-ab)\\ &= l(ab)l(-ab)\\ &= 0,\end{aligned}$$

svo $l(a)l(b) = -l(b)l(a)$. □

Heimildir

[1] A. A. Albert, *Tensor products of quaternion algebras*, Proceedings of the American Mathematical Society **35** (1972), nr. 1, 65 – 66.

[2] Jón Kr. Arason, *Cohomologische Invarianten quatratischer Formen*, Journal of Algebra **36** (1975), nr. 3, 448 – 491.

[3] Jón Kr. Arason og Ricardo Baeza, *Relations in I^n and $I^n W_q$ in characteristic 2*, Journal of Algebra **314** (2007), nr. 2, 895 – 911.

[4] Hyman Bass, *John Milnor the algebraist*, Topological Methods in Modern Mathematics, Publish or Perish, Inc., 1993.

[5] Spencer Bloch og Kazuya Kato, *p-adic etale cohomology*, Publications Mathématiques de l'I.H.É.S. **63** (1986), nr. 1, 107 – 152.

[6] Kazuya Kato, *Symmetric bilinear forms, quadratic forms and Milnor K-theory in characteristic two*, Inventiones Mathematicae **66** (1982), nr. 3, 493 – 510.

[7] Tsit-Yuen Lam, *Introduction to quadratic forms over fields*, American Mathematical Society, 2005.

[8] Hideyuki Matsumura, *Commutative algebra*, önnur útg., The Benjamin/Cummings Publishing Company, 1980.

[9] John Milnor, *Algebraic K-theory and quadratic forms*, Inventiones Mathematicae **9** (1970), nr. 4, 318 – 344.

[10] Dmitri Orlov, Alexander Vishik og Vladimir Voevodsky, *An exact sequence for $K_*^M/2$ with applications to quadratic forms*, Annals of Mathematics **165** (2007), nr. 1, 1–13.

[11] Albrecht Pfister, *On the Milnor conjectures: History, influence, applications*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung **102** (2000), nr. 1, 15 – 41.

[12] Daniel Quillen, *On the cohomology and K-theory of the general linear groups over a finite field*, The Annals of Mathematics **96** (1972), nr. 3, 552–586.

[13] Markus Rost, *The chain lemma for Kummer elements of degree 3*, C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. **328** (1999), nr. 3, 185 – 190.

[14] Uzi Vishne, *Generators of central simple p-algebras of degree 3*, Israel Journal of Mathematics **129** (2002), nr. 1, 175 – 187.

[15] Vladimir Voevodsky, *The Milnor conjecture*, forprent, 20. des. 1996, K-theory Preprint Archives, http://www.math.uiuc.edu/K-theory/0170/.