Listaháskóli Íslands

Tónlistardeild

Tónsmíðabraut

Kvarttónar

Matthías Arnalds Stefánsson

Leiðbeinandi: Atli Ingólfsson

Vor 2009

Efnisyfirlit

Formáli

Í þessari ritgerð ætla ég að skoða kvarttóna og sýna fram á hvernig við getum notfært þá til að nýta einkenni 24 tóna umhverfis. Það eru mörg áhugaverð tónbil sem myndast við það að skipta áttundinni upp í fleiri einingar og gefur af sér margfalda möguleika til tónsmíða. Að ferðast í kvarttónum er draumkennt og fjarlægt. Tónbilin eru hvorki ómblíð né ómstríð og á sama tíma framandi og kunnugleg. Sumir hafa líkt hughrifum þess að heyra tónbil 24 tóna kerfisins við það að heyra skipslúður eða lestarflautu.

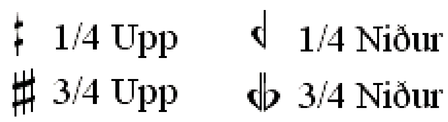
Míkrótónar hafa heillað mig lengi vel og ég hef reynt að kynna mér lauslega eins mörg kerfi og ég komist yfir á undanförnum árum. Ég heillast hins vegar sérstaklega af 24 tóna kerfinu þar sem það er stærðfæðilega rökréttasta þensla á 12 tóna kerfinu sem er svo útbreytt. Því hef ég ákveðið að greina uppbyggingu 12 tóna kerfisins til þess að finna þá möguleika sem 24 tóna kerfið hefur upp á að bjóða. Meðal annars ætla ég að tengja saman nýju tónbilin sem myndast við notkun kvarttóna við yfirtónaröðina og smíða nýja tónstiga byggða á reglum dregnum af 12 tóna kerfinu. Mig langar að sýna fram á hvernig megi ná fram einkennum 24 tóna kerfisins með kerfisbundinni uppbyggingu tónstiga og hljóma.

1. Inngangur

Í jafnstilltu kerfi hefur kvarttónn samsvarandi einingu og hálfur hálftónn eða 50 cent. Mig langar að kanna möguleikana sem myndast við það að skipta öllum hálftónum í tvennt og geta komist "á milli" nótnanna á píanóinu. Þannig væri hægt að deila tónbilum eins og fimmundinni eða ferundinni í tvo jafna hluta sem ekki var hægt áður og þar af leiðandi að búa til nýja tóna og hljóma sem efnivið í tónlist.

1.1 Merkingar

Það hafa verið ýmsar leiðir til að merkja kvarttóna og flestar þeirra eru einhverskonar útfærslur af krossum og béum. Sú algengasta og mest notaða er sú sem sýnd er á myndinni hér fyrir neðan. Kvarthækkun er hálfur kross og ¾ hækkun er einn og hálfur kross. Kvartlækkun er öfugt bé (d) og ¾ lækkun er venjulegt bé og öfugtbé (db). Það má finna þessar merkingar í vel búnum nótnaskriftarforritum svo sem Sibelius og Finale svo eitthvað sé nefnt.



1.2 Hlutföll – Jafnstillt eða Réttstillt

Jafnstilling er þegar tónbili, oftast áttundinni, er skipt jafnt upp í einhvern ákveðinn fjölda nótna til að gefa jafna lengd á milli allra nótna í stillingarkerfinu. Þetta er undirstaða tóntegundaskipta í 12 tóna jafnskipta kerfinu sem við erum vön að nota. Vegna jafnskiptingarinnar skiptir engu máli hvaða tón er byrjað á, hinir tónarnir munu alltaf hafa sömu afstöðu til hvors annars miða við nótnafjölda.

Í réttstillingu er hinsvegar stillt nákvæmlega eftir hlutföllum sem eiga rætur sínar að rekja í yfirtónaröðinni. Þetta þýðir að það myndast óregluleg bil milli nótnanna í tónstigum sem við búum til, öll tónbil milli allra nótna munu hafa mismunandi bil sín á milli. Það er stundum talað um að réttstilling sé mónófónísk stilling þar sem hún er stillt frá grunntón. Þannig er ekki hægt að skipta um tóntegund án þess að "skipta um stillingu".

Hér mun ég fara lauslega í hlutföll og tengsl nýju tónbilanna við yfirtónaröðina sökum þess að ég tel skilning okkar á 12 tóna kerfinu lærða túlkun á tilbúnu kerfi og vil sjá hvar við förum út af sporinu og kerfið leikur á okkur. Hér er ég að tala um skekkjuna frá réttstilltum hlutföllum sem kemur upp við að jafnstilla. Yfirtónaröðin er náttúruleg, þ.e. hún fyrirfinnst í náttúrunni og er óháð kerfum mannsins, réttstillingin er síðan endurspeglun á henni og tengslin þeirra á milli afar nákvæm.

Mig langar að finna hljómfræðilegar forsendur fyrir því að nota kvarttóna og því hef ég stuðst við uppbyggingu dúr og moll kerfisins til að smíða tónstiga sem lýsa möguleikum 24 tóna kerfisins.

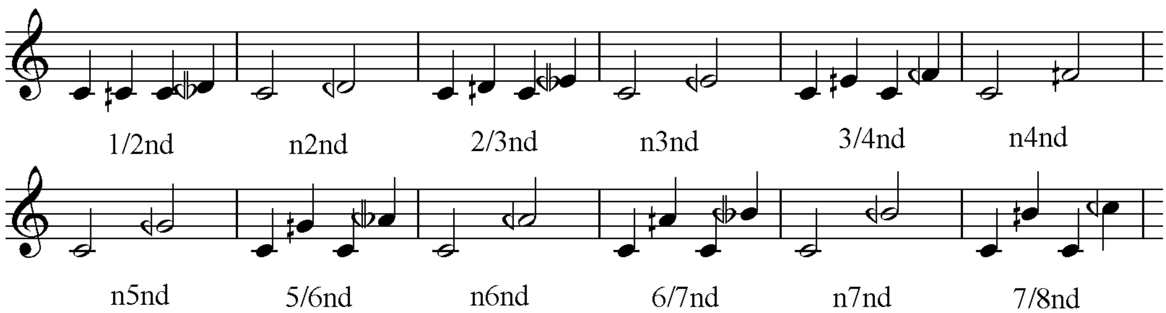
1.3 Notkun kvarttóna

Snemma á 20. öldinni voru þó nokkur tónskáld sem sömdu í 24 tóna kerfinu en kerfið er þó töluvert eldra. Arabísk og persnesk tónlist byggir á 24 tóna kerfi en kerfið þeirra var réttstillt fram á 19. öld þegar 24 tóna jafnstillingin var sett fram af sagnfræðingnum og tónskáldinu Mikhail Mishaqa í Sýrlandi**.** Arabísk tónlist notar þó ekki kvarttóna í hljómum, aðeins í laglínum svo jafnstillingin var vegna praktískra ástæðna en ekki hljómfræðilegra. En ópraktík 24 tóna kerfis hefur eflaust verið stærsti þáttur þess að kvarttónar hafa ekki verið meira notaðir en raun ber vitni.

Flest hljóðfæri hafa valdar nótur sem hægt er að spila og því ekki fær um að framleiða kvarttóna, þó eru nokkur sem geta farið á milli hinna hefðbundnu nóta. Má þá helst nefna strengjahljóðfæri og röddina en oftar en ekki eru hljóðfæraleikarar og söngvarar ekki vanir kvarttónum og eiga erfitt með að ítóna þá. Básúnan gæti hljómað eins og góður kostur en kvarttónar eru milli pósisjóna hjá básúnuleikurum sem veldur óþægindum og ítónunarvandræðum. Tónskáldið Alois Hába samdi þó básúnukvartett með kvarttónum sem var spilanlegur. Önnur möguleg hljóðfæri eru píanó eða hljómborðshljóðfæri, hugsanlega hörpur líka. Þá er hægt að vera með tvö hljóðfæri og annað stillt kvarttóni frá hinu. Tónskáldin Ivan Wyschnegradsky, Alois Hába, Charles Ives, Mildred Couper o.fl. sömdu öll verk fyrir tvö píanó. Nú þegar tölvutæknin getur framleitt allar tíðnir og reiknað hárnákvæm tónbil fáum við vonandi að sjá aukningu í kvarttóna tónsmíðum á komandi öld. Það sýndi sig strax í hljóðgerflum á 8. og 9. áratug seinustu aldar þegar byrjað var að bjóða uppá aðrar tónstillingar fyrir hljómborðin. Til þess að nýta þessi tækifæri til að spila kvarttóna þá þurfum við að kanna möguleikana sem eru fyrir hendi. Með notkun kvarttóna myndast ný tónbil og fyrst þarf að skoða einkenni þeirra. Á milli nótnanna sem mynda þessi nýju tónbil reynist fjöldi kvarttóna ávallt vera í oddatölu.

Hér fyrir neðan hef ég sett upp töflu með nýju tónbilunum sem myndast, nöfnum þeirra og fjölda kvarttóna þar á milli. Ef taflan er skoðuð má sjá að nýju tónbilin innihalda fjölda kvarttóna í oddatölum. Krómatísku tónbilin sem við þekkjum úr 12 tóna kerfinu innihalda fjölda kvarttóna í sléttum tölum og eru ekki listaðar á töflunni.

1.4 Ný tónbil í 24 tóna umhverfi



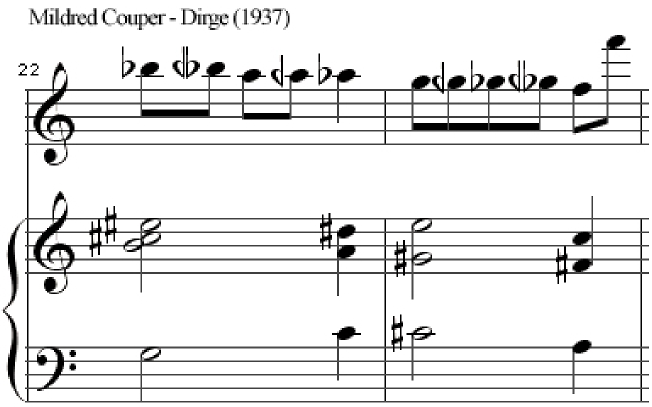
Tónbil	Kvarttónar	Cent	Hlutföll	Just cent	Mismunur
1/2nd	1	50.00	36:35	48.77	-1.23
n2nd	3	150.00	12:11	150.64	0.64
2/3nd	5	250.00	15:13	247.74	-2.26
n3nd	7	350.00	11:9	347.41	-2.59
3/4nd	9	450.00	13:10	454.21	4.21
n4nd	11	550.00	11:8	551.32	1.32
n5nd	13	650.00	16:11	648.68	-1.32
5/6nd	15	750.00	20:13	745.79	-4.21
n6nd	17	850.00	18:11	852.59	2.59
6/7nd	19	950.00	26:15	952.26	2.26
n7nd	21	1050.00	11:6	1049.36	-0.64
7/8nd	23	1150.00	70:36	1151.23	1.23

Ef við skoðum töfluna nánar sjáum við að það myndast krómatískur tónstigi kvarttóni frá þeim sem við erum vön. Hægt er að skipta öllum krómatískum hálftónum í tvennt og þar af leiðandi er hægt að skipta öllum krómatískum tónbilum í tvennt.

Tónbil sem innihalda 3 (n2nd), 7 (n3nd), 11 (n4nd), 13 (n5nd), 17 (n6nd) og 21 (n7nd) kvartón sem eru 6 af 12 nýju tónbilunum eru nálgun á hlutföllum sem ganga upp í ellefu (x/11 eða 11/x). Það má því segja að helmingur nýju tónbilanna tengist gegnum ellefta yfirtóninn. Þetta er lengra upp yfirtónaröðina en við erum vön að hlusta eftir í tónlist, að undanskilinni lítilli tvíund og stórri sjöund sem leita í 15. yfirtóninn. Þessi tónbil sem tengjast gegnum ellefta yfirtóninn eru nefnd hlutlausu tónbilin því þau liggja á milli stóru og litlu tónbilanna sem við erum vön að þekkja. Hlutlausa ferundin (n4nd) og hlutlausa fimmundin (n5nd) eru þó annars eðlis því þau liggja milli minnkaðrar fimmundar og hreinnar fimmundar annars vegar og hreinnar ferundar og stækkaðrar ferundar hinsvegar. Wischnegradsky nefndi þessi tónbil stóra ferund og litla fimmund en það myndast engin lítil ferund né stór fimmund til mótvægis sem er eðlileg hegðun stóru og litlu tónbilanna sem við þekkjum svo vel.

Tónbilin 3/4ndin og 5/6ndin leita í 13. yfirtóninn og 2/3ndin og 6/7ndin leita í 15. yfirtóninn. Því mætti segja að öll nýju tónbilin séu tæknilega ómstríðari en við erum vön. Tæknilega ómstríðari því tónarnir í þessum tónbilum tengjast saman ofar í yfirtónaröðinni heldur en krómatísku tónbilin. Tónskáldið Easley Blackwood skilgreindi einmitt nýju tónbilin sem "discord" sem átti að vera þriðji flokkurinn til viðbótar við ómblíður og ómstríður. Hann beitti síðan kontrapúnktískum aðferðum og til að útskýra kvarttóna lætur hann "discord" tónbil leysast á ómstríður sem leysast í ómblíður.

Tónbilið 1/2ndin er ekki ákjósanlegt hljómrænt tónbil, því mismunurinn er svo lítill milli nótnanna. Milla A440 og A𝄲452,89 (1. kvarttón eða 1/2nd hærra) er tæplega 13hz munur, vel heyranlegur sláttutónn[*] myndast og verður greinilegri því neðar sem farið er á tíðnisviðið. Þessi tónn sem núllast út hverfur þó ef við dreifum tónbilinu milli áttunda svo nástaða er eina "hættan". Þessar hugmyndir minna á reglur um tvíundir í kontrapunkti og hljómfræði enda sama hugmynd að baki nema nú er þessi nástaða enn meiri. Að ganga í kvarttónum í melódísku samhengi er þó ekki úr vegi. Bandaríska tónskáldið Mildred Couper í verki sínu Dirge notaði kvarttónalínur til að búa til enn þéttari fallandi línur heldur en krómatík. Á myndinni má sjá takta 22-23 í Dirge og þar er krómatísk lína sem inniheldur kvarttóna tengitóna á veikum slögum.



---

* Ef mismunur milli tíðna er minni en 20hz byrjum við að heyra tíðnimismuninn sem “högg” á lágtíðnisviðinu. Þegar bylgjurnar tvær sem mynda tónbil eru nógu nálægt (<20hz frá) hvor annarri fasa þær hvor aðra “rólega” út og inn þannig að við skynjum sveiflu í styrk á tónunum. 13Hz er sambærilegt við ~76.9ms millibil milli “slátta”.

2. Hljómur og tenging við yfirtónaröðina.

Hljómrænt samhengi kvarttóna er nátengt ellefta yfirtóninum ásamt viðkomu í þeim þrettánda og fimmtánda. Hlutlausu tónbilin tengjast gegnum ellefta yfirtóninn.

Ellefti yfirtónn				
11:**6** n7nd	11:**7** *782.49*	11:**8** n4nd	11:**9** n3nd	11:**10** *165.00*
12:11 n2nd	**14**:11 *417.51*	**16**:11 n5nd	**18**:11 n6nd	**20**:11 *1034.99*

Þrettándi yfirtónn					
13:**7** *1072*	13:**8** *841*	13:**9** *637*	13:**10** 3/4nd	13:**11** *289*	13:**12** *139*
14:13 *128*	**16**:13 *359*	**18**:13 *563*	**20**:13 5/6nd	**22**:13 *911*	**24**:13 *1061*

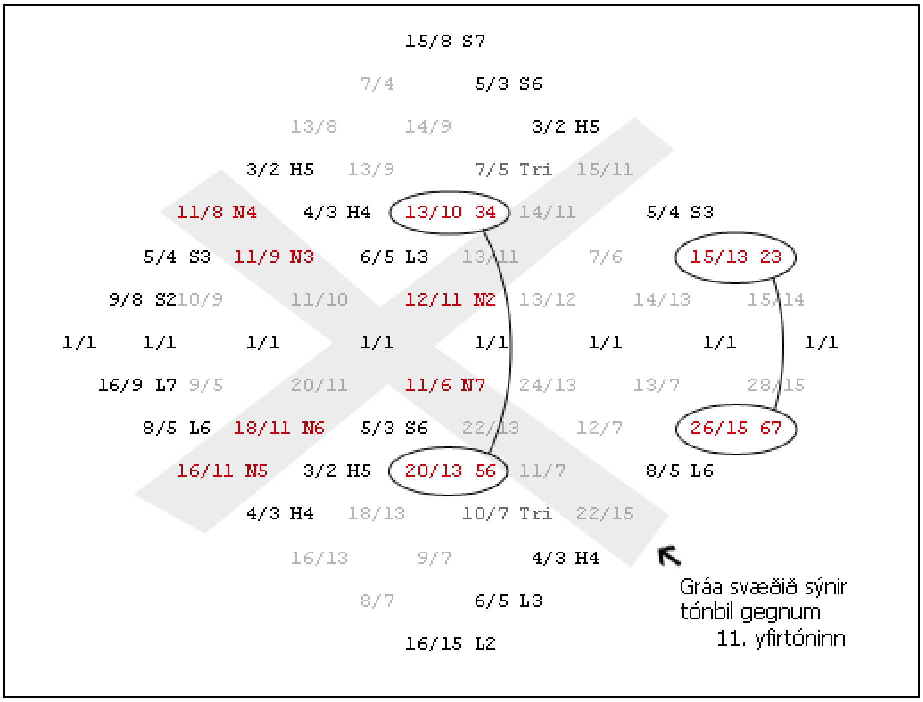
Fimmtándi yfirtónn						
15:**8** s7nd	15:**9** 5:3	15:**10** 3:2	15:**11**	15:**12** 5:4	15:**13** 2/3	15:**14**
16:15 l2nd	**18**:15 6:5	**20**:15 4:3	**22**:15	**24**:15 8:5	**26**:15 6/7	**28**:15

Ef við skoðum töfluna hér að ofan sjáum við hvernig tónbilin parast upp í hlutföll og andhverf hlutföll sín. Til að komast í 11:10 <=> 20:11 notum við einnig n2nd <=> n7nd. N2nd túlkar 11:10 jafnt sem 12:11 þó hún liggji á 12:11. Þetta verður útskýrt nánar í kafla 2.4 en þangað til er munurinn á 11:10 og 12:11 15 cent, sem er ekki mikið, jafn mikið og skekkjan á s6ndinni í jafnstillingu frá réttstillingu. Hlutföllin 11:7 <=> 14:11 er ekki nálguð því við missum af 7. yfirtóninum í 24 tóna kerfinu. 12 tóna kerfið inniheldur að 5. yfirtón og 24 tóna kerfið bætir við 11. yfirtón svo við missum af þeim 7. Ef við værum með 60 tóna jafnskiptingu gætum við náð 14:11 nokkuð vel með stórri þríund plús 1/5 tón sem væri 20 cent. Tónbilið 420 cent væri 2,5 centum frá tóninum 14:11 sem hefur 417.5 cent.

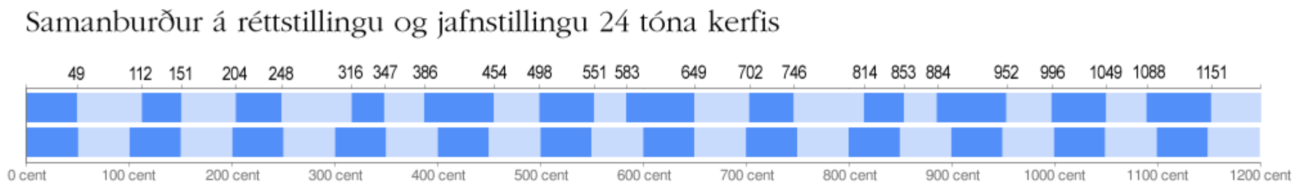
2.1 Samanburður við Harry Partch og réttstillingu

Til að bera saman 24 tóna kerfið við réttstillingu hef ég tekið hlutfallatígul frá tónskáldinu Harry Partch sem nær uppí 15. yfirtón og merkt inn hlutföllin sem eru næst tónbilunum sem við þekkjum með nöfnum. Litað með svörtu þau tónbil sem eru í 12 tóna kerfinu og rauðu því sem bætast við í 24 tóna kerfinu. Stækkaða ferundin og minnkaða fimmundin eru ekki sama tónbilið í réttstillingu en í jafnri stillingu er þetta tónbil eitt og hið sama og liggur akkúrat á milli hlutfallanna sem réttstillingin býður uppá.

Fyrir nýju kvarttónatónbilin merkti ég grátt svæði sem myndar X. Það sýnir svæðið í tíglinum sem vísar í 11. yfirtóninn. Rauðu hlutföllin (tónbilin) inní gráa Xinu eru hlutlausu tónbilin (n4, n5, n3, n6, n2, n7). Blöðrunar sem eru tengdar sýna svo 3/4ndina og andhverfu hennar 5/6ndina og hinsvegar 2/3ndina og andhverfu hennar 6/7ndina.



Ég setti upp tígulinn til að sýna staðsetningu nýju tónbilanna á tvívíðu plani. Ef við skoðum tónbilin yfir heildina sjáum við hvernig andhverf tónbil parast saman symmetrískt um einundina. L7 – S2 eru fremst í fyrstu línu fyrir ofan og neðan einundina. S3 – L6 eru fremst í annarri línu fyrir ofan og neðan einundina o. s. frv. Vegna þess að við skiptum áttundinni jafnt upp í 12 tóna þá erum við að nálgast tónbilin en ekki að spila raunveruleg gildi þeirra í hlutföllum. Hugur okkar sér svo um að greina hvaða tónbili við erum nálægt og ef munurinn er nógu lítill heyrum við hann ekki, þó hann sé til staðar. Súluritið hér fyrir neðan sýnir skekkjurnar sem eiga sér stað milli jafnstilltra kvarttóna og réttstilltu hlutfallanna sem þeir liggja nálægt. Upphaf dökku reitanna eru krómatísku tónbilin meðan upphaf ljósu eru tónbil sem krefjast kvarttóna.



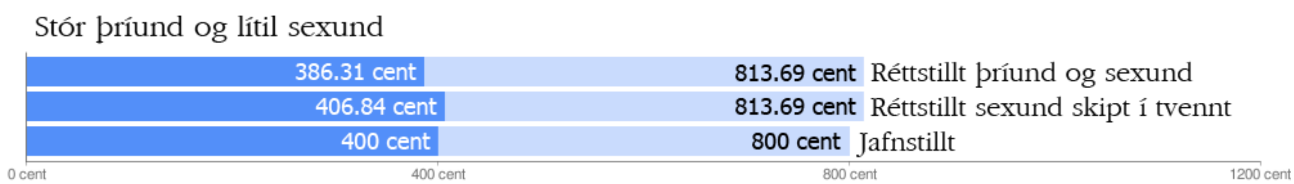
Ef við veltum fyrir okkur réttstilltum hlutföllum og tökum hreinu fimmundina sem dæmi þá er hrein fimmund í réttstillingu hlutfallið 3/2, mælt sem (tæplega) 702 cent. Í 12 tóna jafnskiptingu er fimmundin 700 cent sem er ekki heyranlegur munur frá 702 en gerir okkur kleift að ferðast fimmundarhringinn (12 fimmundir) og enda aftur á 700 cent en ekki 724 cent sem væri heyranlegur munur sem myndi myndast við að ferðast alltaf réttstillt tónbil. Helsta ástæðan fyrir að þetta er óhentugt er að hljóðfæri þyrftu að geta spilað óendanlega margar og nákvæmar tíðnir til að geta uppfyllt öll réttstillt skilyrði en til að takmarka nóturnar var jafnstillta kerfið fundið upp. Við það að jafnstilla mynduðust þó aðrir möguleikar líka því nú er hugurinn að sjá um túlkun á hlutföllum sem ekki eru fullkomin og geta gabbað okkur um hljómfræðilega framvindu.

2.2 Minnkaða fimmundin eða stækkaða ferundin – hugurinn sér um túlkunina

Ef við skoðum minnkuðu fimmundina sjáum við enn áhugaverðari hlið af þessum nálgunum. Minnkaða fimmundin og stækkaða ferundin er sama tónbilið í jafnstilltu kerfi. Í réttstilltu kerfi hafa þessi tónbil mismunandi gildi 7/5 er stækkuð ferund á meðan 10/7 er minnkuð fimmund. Þessi tónbil eru þó jafn langt frá gildinu sem sett er fram í jafnstillingu. Jafnstillta stækkaða ferundin er geometrísk miðja áttundarinnar sem þýðir að hún er einnig geometrísk miðja milli tónbila og andhverfu þeirra. Við getum sagt að jafnstillta stækkaða ferundin sé kvaðratrótin af tveim eða geometrísku miðjuna milli 1/1 og 2/1. Þetta sýnir tvíræðnina í tónbilinu og útskýrir afhverju við getum túlkað tónbilið bæði sem minnkaða fimmund og stækkaða ferund í senn þrátt fyrir að þessi tónbil hafi mismunandi staðsetningu í réttum hlutföllum. Við erum að leika á hugann. Við heyrum tíðnirnar sem spilaðar eru en túlkum þær miðað við innbyrðis tengsl tóna. Í túlkun okkar skilgreinir hugur okkar tónbil sem hlutföll af tíðnum. Þetta gerir hann með því að taka tónana sem eyrun heyra og finnur þau tónbil sem hugurinn þekkir þar sem tónarnir liggja næst.

2.3 Þrískipting áttundarinnar – stækkaði hljómurinn

Ef við höldum áfram að skoða jafnskiptingar þá skiptist lítil sexund jafnt í tvær stórar þríundir í jafnri stillingu. Síðan getum við skipt upp stóru þríundunum í stórar tvíundir og fengið heiltónatónstigann. Ef við værum í réttstillingu væri stór þríund ekki geometrískt meðaltal litlu sexundarinnar heldur lægi stóra þríundin aðeins neðar og væri því ekki hægt að umtúlka hljóminn frá hvaða tóni sem er þar sem tónbilin væru í nákvæmu hlutfalli við grunntón og hefðu ekki jafnt bil á milli sín. Heiltónatónstiginn myndi hljóta sömu örlög og vera bundinn við grunntón sem þýðir að hann hefði allt aðra áferð og möguleika heldur en tilbúni jafnskipti heiltónatónstiginn. Sjá má á súlunum hér að neðan hvernig geometrísk jafnskipting á litlu sexundinni er lengra frá réttstilltu stóru þríundinni heldur en jafnskipta stóra þríundin. Þetta er dæmi um skekkju 12 tóna jafnskipta kerfisins sem við erum vön að heyra.

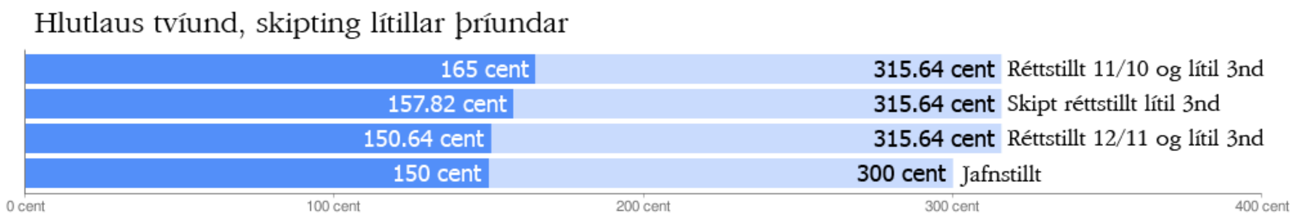


2.4 24 tóna skekkjur – tvöföld túlkun?

Þá skoðum við hvernig þessar skekkjur hafa áhrif á 24 tóna kerfið. Við erum búin að sjá það að jöfn skipting á lítilli sexund í réttstillingu er langt frá stórri þríund. Raunar vegna þess að jafnstillt stór þríund er jöfn skipting á jafnstilltri lítilli sexund þá deila þau skekkjunni milli sín, þær eru háðar jafnskiptingu áttundarinnar. Jafnstillt stór þríund er nær réttstilltu þríundinni ef hún er jafnstillt miða við þrískiptingu áttundarinnar heldur en jafna skiptingu á réttstilltri sexund.

Með því að auka upplausnina á áttundinni okkar en halda skiptingunni sem fyrir var erum við að kafa dýpra í kerfið sem við þekkjum. Eða með því að nota skiptingu á áttundinni sem 12 gengur upp í, t.d. 24, 36, 144, viðhöldum við 12 tóna krómatíska tónstiganum sem hlutmengi af nýja nótnakerfinu. Ef við myndum nota 19 eða 22 nótna kerfi værum við að fá aðrar nálganir á tónbil sem við nú þegar þekkjum. En meðan við erum í kerfum sem 12 gengur upp í leitum við lengra upp yfirtónaröðina og skekkjan verður meiri.

Ef við kíkjum á réttstillta litla þríund og skiptum henni í tvennt, lendum við akkúrat á milli 11/10 og 12/11. Þetta er það sama og gerist þegar við jafnskiptum áttundinni, þá lendir stækkaða ferundin akkúrat á milli 7/5 og 10/7. Nema nú er skekkja í spilinu hjá jafnstillta kerfinu, á áttundinni er engin skekkja og því lendir hálf áttund akkúrat á milli 7/5 og 10/7 en af því jafnstillt lítil þríund skekkir miðju sína færist hlutlausa tvíundin. Ef við skoðum hlutlausu tvíundina liggur hún alveg við 12/11.



Það hljómar því undarlegt en satt að hlutlausa tvíundin hljómar sem 12/11 en hefur virkni bæði 12/11 og 11/10 í hljómfræðilegu og túlkunar samhengi. Hljómur tónbilsins er því þýðari heldur en ef hann væri beint á milli réttu tónbilanna. Hlutlausa tvíundin hefur minnstu skekkjumörk frá yfirtóninum sem hún leitar í þrátt fyrir að yfirtónninn sé langt í burtu myndar þetta sterk tengsl.

Með þessum samanburðum kemur í ljós að kvarttónar liggi nær raunverulegum hlutföllum sínum heldur en krómatískir tónar. Þrátt fyrir það hafa þeir tvíræðari merkingu því við höfum nú þegar vanist bjöguðu krómatísku tónum okkar sem túlkun á réttum tónbilum og kvarttónar eru kerfisbundið búnir til út frá krómatíska tónstiganum. Kvarttónatónbil eru skýr en fjarlæg tónbil sem krefjast nýjar nálgannir í tónlist. Það þarf að setja nýju tónbilin sem náttúrulegar undirstöður í tónlist sem beitir kvarttónum.

3. Uppbygging tónstiga 24 tóna kerfisins.

Í þessum kafla ætla ég að lýsa tónstigum sem eru einkennandi fyrir 24 tóna kerfið. Hér er ég að ræða um hvernig við getum sigtað niður 24 tóna tónstigann til að búa til tónstiga sem hafa lagrænt og hljómrænt gildi ásamt því að nýta kvarttóna. Kvarttónum eru fáar takmarkanir settar og hægt að nálgast þá með mismunandi hætti. En hér ætla ég taka fyrir tónal tónstiga. Með tónal á ég við tónstiga sem eru byggðir upp á svipuðum forsendum og þeir tónstigar sem eru vinsælir í 12 tóna kerfinu, dúr, moll, pentatóník, heiltóna ofl. Ég fer yfir nokkrar reglur sem eru fengnar úr *Journal of Music Theory* og fjalla um stærðfræðilega nálgun á díatónískum tónstigum. Þar er lýst einkennum díatónískra tónstiga út frá talna- og mengjafræðilegu sjónarmiði. Með þessu móti getum við tekið þessi einkenni á díatónískum tónstigum í 12 tóna kerfinu, þanið út kerfið í 24 tóna og heimfært reglurnar aftur nema nú í helmingi meiri upplausn.

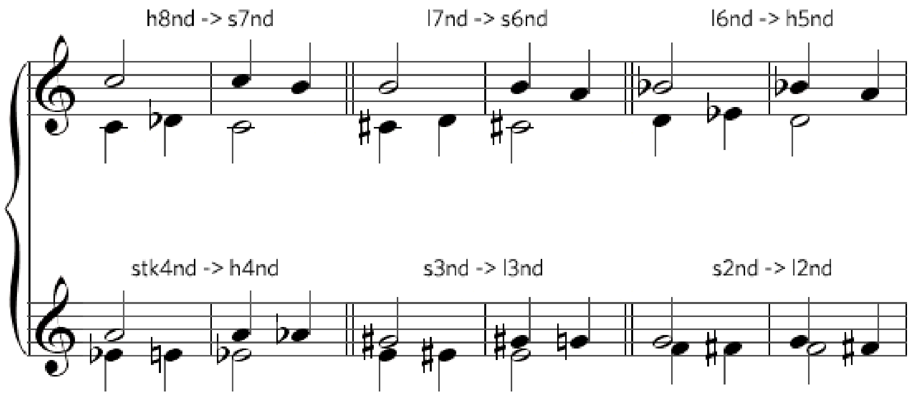
Nú er ég að velta fyrir mér litum og áferðum 24 tóna kerfisins, hvernig við getum byggt upp melódíur, pólífóníu og harmóníur sem hafa innbyrðis reglur sem mætti binda í tónstiga. Ef við hugsum um 12 tónbil 12 tóna kerfisins sem geta átt sér stað frá öllum 12 krómatísku nótunum, (12x12) þá höfum við 144 tónbil. Þessi tónbil geta nú verið á 24 nótum sem gera (12x24) 288 tónbil og við fáum blönduð tónbil af oddatölu kvarttónafjöldum sem eru 12 tónbil í viðbót (24x24) 576 mismunandi uppraðannir á tveim nótum. Ef við tölum síðan um þríhljóma eða ferhljóma margfaldast möguleikarnir enn meira og því er mikilvægt að velja litina af litaspjaldinu. Í orðum Alois Hába: “After all, the painter does not always paint with all colors and mixtures of colors.”

3.1 Tveir fimmundahringir.

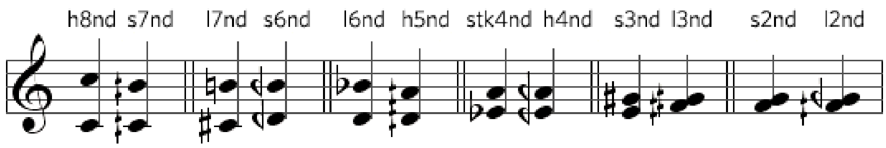
Í gegnum árin hefur fimmundahringurinn verið leiðarljós manna að tóntegundaskiptum og er uppistaðan á dúr og moll kerfinu. Þegar við bætum við kvarttónum helst fimmundahringurinn sá sami, sem þýðir að við komumst ekki nema á helming nótnanna með fimmundartengslum. Það mætti í raun hugsa að það séu tveir fimmundahringir í 24 tóna kerfinu sem ná aldrei saman. Þetta þýðir að það er ekki hægt að komast á milli fimmundahringja með neinum af þeim tónbilum sem við þekkjum úr 12 tóna kerfinu. Öll þau tónbil sem við erum vön að nota verða að sléttutölu fjölda kvarttóna sem mynda krómatíska tónstigann (sem er núna tvennt af sbr. tveir fimmundahringir). Tónskáldið Charles Ives talaði um tvo heima sem verið væri að vinna sig á milli þegar kvarttónar eru notaðir. Í verki Sofiu Gubaidulinu *Music for Flute, Strings and Percussion* eru tvær strengjasveitir önnur stillt kvarttón frá hinum og Gubaiduline í útskýringu sinni á verkinu: “I understand it as a unification of two spaces: the first is the twelve-semitonal space, and the second is another twelve-semitonal space a quartertone higher. For me this is a metaphor of the image and its shadow, or a day and a night.... I like the episode in *Music for Flute and Strings* where one space (a group tuned one quarter tone lower) moves up, whereas another space (a group tuned conventionally) moves down. These spaces move crosswise, but do not “notice” each other.”

Þessi hugmyndafræði um tvo heima kemur einnig fram í *Neue Harmonielehre* eftir Alois Hába þar sem hann sýnir fram á að við getum notað kvarttóna melódískt og þannig velt hljómum milli tveggja krómatískra tónstiga. Hann talar um svæði sem við færum okkur á milli sem eru krómatíski tónstiginn okkar og annar krómatískur tónstigi kvarttón ofar. Með því að nota einungis hljóma úr 12 tóna kerfinu en að stækka melódíska samhengið uppí 24 nótur fáum við strax margfalt fleiri möguleika enn áður. Til að mynda er nú hægt að fara milli allra krómatískra tónbila með gagnstígri hreyfingu. T.d. getur s3nd ekki orðið að h4nd nema önnur nótan fari upp eða hin niður í 12 tóna kerfinu. En í 24 tóna kerfinu geta báðar raddirnar farið kvarttón í sundur og myndað gagnstíga hreyfingu úr s3nd í h4nd.

12 tónar - Ósamstíg hreyfing



24 tónar - Gagnstíg hreyfing



3.2 Einkenni díatónískra tónstiga

Í eftirfarandi greiningum ætla ég að athuga möguleika þess að búa til tónstiga í 24 tóna kerfinu sem hafa einkenni díatónískra eiginleika. Díatóník á hér við einkenni sem eiga við dúr og moll tónstiga sem hægt er að útskýra með mengjum og reglum. Eftir að hafa greint 12 tóna kerfið okkar út frá þessum einkennum getum við heimfært reglurnar uppá 24 tóna kerfið og búið þá til tónstiga sem leita í uppbyggingu 12 tóna tónstiga.

Eftirfarandi einkenni eru tekin úr greinum eftir tónlistarfræðinginn John Clough et al. sem fjalla um tónbil og kerfisbundna uppbyggingu þeirra í fjölbreytta díatóníska tónstiga. Það hefur talsvert verið skrifað og fjallað um þessar greinar þar sem þær gefa skýra mynd afhverju hljómfræði okkar byggist upp á dúr og moll. Auðvelt er að heimfæra þessar reglur á önnur tónkerfi þar sem reglurnar byggja á tölum sem eru afstæðar en ekki nöfnum eða hugmyndafræðum smíðuð fyrir 12 tóna. Ég tek fyrir 5 einkenni og útskýri þau með 12 tóna kerfinu til að síðar geta byggt upp 24 tóna tónstiga.

3.2.1 Framleidd söfn

Allir tónstigarnir sem ég tek fyrir eru framleitt safn nótna (generated collection). Það þýðir að tónstigarnir eru byggðir upp á einu tónbili sem er lagt endurtekið við sjálft sig til að fá aðra tóna tónstigans. Við getum litið á fimmundarhringinn sem dæmi um framleitt safn fimmunda. Það tæmir alla 12 tóna krómatíska tónstigans yfir 7 áttundir. Ef við byggjum hámarks dreifðan (skilgreint í 3.2.3) tónstiga út frá framleiddu safni nótna þurfum við að taka jafn margar nótur og tónbilið er að stærð hálftónum. Sumsé 7 nótur í tónstiga byggðan á fimmundum (7 hálfnótur í fimmund). Þetta orsakast af því að ef við förum sjöundu nótuna frá grunntón erum við komin einum hálftón ofar en grunntónninn og hringrásin endurtekur sig. 7*7 = 49, 49/12 = 4 með afganginn 1 sem er hálftónninn sem við erum komin frá grunntóni (0).

Sem dæmi er dúr tónstiginn byggður upp á fimmundum ef við reiknum upp C dúr tónstigann frá F og modulerum um 12 fáum við: **5** = F; 5 + 7 = **0**, 0 + 7 = **7**, 7 + 7 = **2**, 2 + 7 = **9**, 9 + 7 = **4**, 4 + 7 = **11**. { 5, 0, 7, 2, 9, 11 } = { F, C, G, D, A, E, H } = { C, D, E, F, G, A, H }.

Annað dæmi væri pentatóníski tónstiginn, byggður upp á hreinum ferundum. Þá tækjum við 5 nótur því það eru 5 hálftónar í hreinni ferund Frá A: **9** = A; 9 + 5 = **2**, 2 + 5 = **7**, 7 + 5 = **0**, 0 + 5 = **5**. { 9, 2, 7, 0, 5 } = { A, D, G, C, F } = { C, D, F, G, A }

Talað er um takmörkuð söfn ef tónbilið sem notað er til að framleiða safnið gengur upp í skiptinguna á áttundinni sem við notumst við. Stækkaða ferundin er dæmi um takmarkað safn tveggja nótna þar sem þriðja nótan yrði áttund. Stækkaður hljómur, fullminnkaður sjöundarhljómur og heiltónatónstiginn eru allt dæmi um takmörkuð söfn í 12 tóna kerfinu.

3.2.2 Djúpir tónstigar

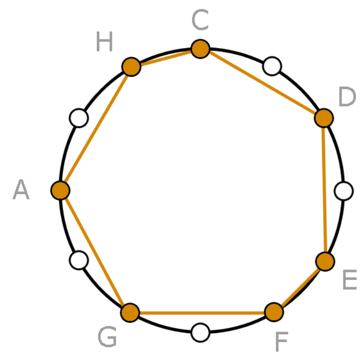
Djúpir tónstigar (deep scale property) er skilgreining á tónstigum sem innihalda einstakan fjölda tónbila fyrir hvert tónbil sem finnst í tónstiganum. Tónbil eru flokkuð með andhverfu sinni svo l6nd er túlkuð sem s3nd, h5nd sem h4nd, s6nd => l3nd o.s.frv. Í dúr-tónstiganum má finna öll krómatísku tónbilin en með einkennandi fjölda tilvika. þ.e.a.s. í C dúr eru:

Fjöldi	Tónbil	Tilfelli	Skref
6	h4ndir	(C-F, D-G, E-A, G-C, A-D, H-E)	3 skref
5	s2ndir	(C-D, D-E, F-G, G-A, A-H)	1 skref
4	l3ndir	(D-F, E-G, A-C, H-D)	2 skref
3	s3ndir	(C-E, F-A, G-H)	2 skref
2	l2ndir	(E-F, H-C)	1 skref
1	stk4nd	(F-H)	3 skref

Við það að skoða djúpa tónstiga getum við séð sameiginlega tóna meðal tónstiga og sama tónstiga tónfluttan um ákveðið tónbil. Dúr tónfluttur um h4nd hefur 6 sameiginlega tóna rétt eins og fjöldi ferunda í dúr-tónstiganum (sama myndi gilda um fimmundina). Dúr tónfluttur um l3nd myndi hafa fjóra sameiginlega tóna o.s.frv.

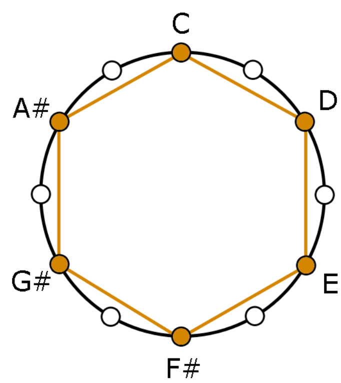
3.2.3 Hámarksdreifing

Hámarksdreifing (Maxmial Eveness) er einkenni tónstiga sem hafa eins jafna dreifingu og hægt er. Þá erum við að athuga hvort einhver ákveðinn fjöldi nótna dreifist sem mest miða við kerfið sem við höfum valið okkur að vinna í. Til að mæla jafna dreifingu athugum við alla mismunandi skrefafjölda hvort það séu til eitt eða tvö samlæg tónbil. Ef svo er tryggir skilyrðið að það sé hámarks dreifing miða við fjölda nótna sem við erum að vinna með. Við getum sett fram hámarksdreifingu sem mynd með því að draga hring sem táknar áttundina, inná þennan hring merkjum við punkta sem tákna nótur yfir áttundina. Loks drögum við línur á milli og merkjum punktanna sem eru í tónstiganum. Þá fáum við hyrning sem þekur flöt tónstigans.



Hámarksdreifing Dúr tónstigans

Á myndinni hér til hliðar er sýnt hvernig dúr tónstiginn hefur hámarksdreifingu. Það eru tvær mismunandi útgáfur af skrefastærðum, heiltónn (2 hálftónar); C-D, D-E, F-G, G-A og A-H og hálftónn (1 hálftónn); E-F, H-C.



Hámarksdreifing heiltónatónstigans

Ef fjöldi nótna gengur upp í kerfið sem unnið er í verður til eitt tónbil fyrir öll skref til að ná hámarksdrefingu. Dæmi um þetta er heiltónatónstiginn sem hefur 6 nótur 12/6 = 2. Því verður hver skrefastærð 2 hálfnótur eða heiltónn sbr. heiltónatónstiginn. C-D, D-E, E-F#, F#-G#, G#-A#, A#-C# hafa öll heiltón á milli sín.

3.2.4 Fjöldi ákvarðar fjölbreytileika

Reglan um að fjöldi ákvarði fjölbreytileika (Cardinality equals variety) er byggð á þeirri hugmynd að ef við tökum ákveðið (X) margar nótur í röð (sem hafa 1 skref á milli sín). Þá fáum við ákveðið (X) margar mismunandi tónbilasamsetningar miðað við ákveðið (X) margar nótur. Við gætum einnig sagt að viss mörg skref gefi okkur X+1 margar tónbila samsetningar.

Við getum skoðað hvernig reglan á við um C dúr tónstigann. 1 skref hefur tvö mismunandi tónbil, s2nd og l2nd, og í einu skrefi eru tvær nótur; X+1 skref = X útgáfur = X nótur. S2nd er í þessu tilfelli t.d. C-D eða F-G á meðan l2nd væri E-F eða H-C. 2 skref sem inniheldur þrjár nótur hefur þrjár útgáfur; s2nd + s2nd, s2nd + l2nd og l2nd + s2nd, nú sjáum við þrjár mismunandi samsetningar en tvö mismunandi heildartónbil, l3nd og s3nd, en þegar við erum að láta fjölda skapa fjölbreytni skoðum við mismunandi samsetningar skrefafjöldans en ekki heildartónbil nótnanna; C-D-E er s2-s2, D-E-F er s2-l2, E-F-G er l2-s2.

3.2.5 Myhill einkennið

Myhill einkennið (Myhill property), nefnt eftir stærðfræðing John Myhill, er einkenni tónstiga sem hafa tvær stærðir af hverjum skrefafjölda í tónstiganum. þ.e.a.s. s3nd og l3nd hafa stærðirnar 4 og 3 í hálftónum en báðar túlka 2 skref í dúr tónstiga. Allir skrefafjöldar verða að hafa tvær stærðir sem geta myndast á mismunandi sætum tónstigans til að fallast undir Myhill einkennið. Ef við skoðum töfluna fyrir C dúr tónstigann aftur getum við séð að allir skrefafjöldar hafa tvær stærðir: l2nd og s2nd (1 skref), l3nd og s3nd (2 skref), h4nd og stk4nd (3 skref).

Myhill einkennið tryggir önnur skilyrði. Ef Myhill einkennið er uppfyllt getum við tryggt það að tónstigi sé framleitt safn nóta, hafi hámarks dreifingu, sé djúpur og að fjöldi ákvarði fjölbreytileika. Öll ofangreind skilyrði eru uppfyllt ef Myhill einkennið er uppfyllt.

3.3 Framleiddir tónstigar fyrir 24 tóna möguleika.

Nú skulum við líta á 24 tóna kerfið og sjá hvernig við getum beitt þessum einkennum til að framkalla tónstiga sem hafa díatóníska eiginleika en eru einkennandi fyrir 24 tóna kerfið. Ég ætla að byrja út frá framleiddum söfnum af nýjum einkennandi tónbilum kvarttónakerfisins. 1, 3, 5, 7, 9 og 11 kvarttónar og andhverfur þeirra mynda sömu framleiddu söfn og eru 23 (1), 21 (3), 19 (5), 17 (7), 15 (9) og 13 (11) kvarttónar (andhverfur merktar í svigum). Ef við skoðum nú kvarttónafjöldana sem við erum að vinna með (1, 3, 5, 7, 9 og 11) þá gefur 1 kvarttónn okkur kvarttónatónstigann sem er allt tónkerfið eins og það leggur sig svo við getum ekki gert hlutmengi með 1 kvarttón. 3 kvarttónar og 9 kvarttónar eru einnig mjög skyldir. Raunar mynda þeir sama framleidda safn nema 9 kvarttónar gera það yfir 3 áttundir.

Eftir standa framleidd söfn af 3, 5, 7 og 11 kvarttónum.

3.3.1 Minnkaði tónstiginn. (3 kvarttónar)

Wischnegradsky komst að því að hægt væri að skipta áttundinni jafnt í 8 hluta Þetta er gert með því að skipta l3ndinni í tvennt. Fjórar littlar þríundir mynda áttund og skipta henni jafnt í fernt. Við þekkjum þennan hljóm oft sem fullminnkaðan sjöundarhljóm. Ef við skiptum nú öllum litlu þríundunum jafnt fáum við átta tóna tónstiga.

Alois Hába sýnir þennan tónstiga í bók sinni *Neue Harmonielehre* og talar þar um hann sem ¾ tóns tónstiga, þar sem n2ndin er milli hálf- (½) og heiltóns (1) eða ¾ tónn.

Hægt er að smíða minnkaða tónstigann með hringjum af n2ndum (3) eða 3/4ndum (9) og andhverfum tónbilum. Minnkaði tónstiginn er 8 tóna tónstigi sem hefur n2nd (3) á milli samliggjandi nótna. Í kvarttónum væri tónstiginn:

Minnkaðitónstiginn									
Skrefastærð	+3	+3	+3	+3	+3	+3	+3	+3	
Nótur	C	D𝄳	Eb	E𝄲	F#	G𝄲	A	H𝄳	C
Kvarttónar	0	3	6	9	12	15	18	21	24(0)
Tónbil	1nd	n2nd	l3nd	3/4nd	m5nd	5/6nd	s6nd	n7nd	8nd

Þessi tónstigi er náskyldur heiltónatónstiganum sem hefur heiltón (4 kvarttóna) á milli nóta og er einnig skyldur í hina áttina til krómatíska tónstigans sem hefur hálftón (2 kvarttóna) á milli sín. Eins og sjá má augljóslega af tónbilastærðinni þá er minnkaði tónstiginn með tónbilafjölda mitt á milli krómatíska- og heiltónatónstiganna. Það mætti einnig lýsa minnkaða tónstiganum sem tveim fullminnkuðum sjöundarhljómum sem liggja n2nd frá hvor öðrum, rétt eins og heiltónatónstiganum mætti lýsa sem tveimur stækkuðum hljómum spiluðum s2nd frá hvor öðrum.

Í 24 tóna kerfi eru til 3 mismunandi minnkaðir tónstigar. En fjöldi heiltónatónstigans og krómatískatónstigans tvöfaldast (sem og allra tónstiga sem til eru í 12 tóna kerfinu). Við getum séð stækkun kerfisins og myndun minnkaða tónstigans vel á listanum hér að neðan:

24 tónar í áttund	12 tónar í áttund
1 - Kvarttóna	-
2 - Krómatískir	1 - Krómatískir
3 - Minnkaðir	-
4 - Heiltóna	2 - Heiltóna

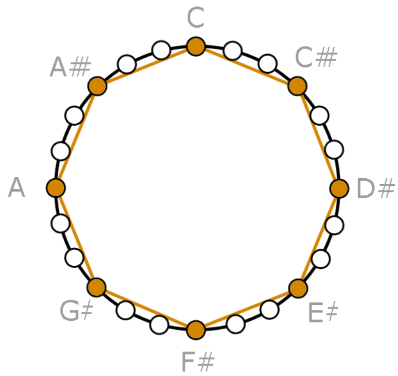
Þar sem eitt tónbil er milli allra samliggjandi nóta er engin fjölbreytni í laglínum. Fjöldi skapar því ekki fjölbreytni. Að sama skapi er sami fjöldi allra tónbila í tónstiganum, 8 skipti (4 í tilfelli mk.4ndar). Sem þýðir að tónstiginn er hvorki djúpur né með Myhill einkennið. Minnkaði tónstiginn er samt takmarkað safn nótna byggt af þrem kvarttónum. Tónstiginn hefur því hámarks dreifingu en er aðskilinn frá tónfluttum útgáfum af sjálfum sér. Hægt er að túlka tónstigann frá hvaða tóni tónstigans sem er. Sameiginleg einkenni og á heiltónatónstiganum. Minnkaði tónstiginn kemur fyrir í öllum jafnskiptingum á áttundinni sem ganga upp í 8. þ.e.a.s.:

8 tóna jafnskiptingu (tónstiginn sjálfur),

16 tóna jafnskiptingu,

24 tóna jafnskiptingu,

32 tóna jafnskiptingu o.s.frv.



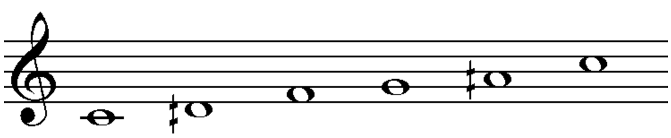
Þetta á einnig við um alla tónstiga sem eru jafnskipt hlutmengi af kerfinu sem þeir eru í, þ.e.a.s heiltónatónstiginn finnst í öllum jafnskiptingum sem ganga upp í 6 (6,**12**,18,**24**,30,36), krómatíski tónstiginn í jafnskiptingum sem ganga upp í 12 (**12**,**24**,36,48).

3.4.2 Jöfn skipting ferundar (5 kvarttónar)

Hægt er að brjóta ferundina niður í s2nd og l3nd í 12 tóna kerfinu. Meðaltalið milli þessarra tónbila er 2/3nd sem hægt er að komast í með 24 tóna kerfinu. Því getum við notað tvær 2/3ndir til að mynda ferund.

Í *Neue Harmonielehre* skýrir Hába frá 2/3ndar hringnum sem ferðast allar 24 nóturnar yfir 5 áttundir áður en grunntóni er náð aftur (framleitt safn nótna úr 2/3ndum). Hann sýnir mögulega hljóma sem við getum byggt út frá þessu tónbili og þenja út tengslin milli nótnanna. Við getum bundið einkenni hringsins í tónstiga með því að taka fyrstu 5 nóturnar úr framleidda safninu og búa til úr þeim tónstiga. Hér erum við að taka jafnan fjölda nótna við stærð tónbilsins í kvarttónum. Rétt eins og þegar við smíðuðum pentatóníska tónstigann í 12 tóna kerfinu í kafla 3.2.1.

Við getum að sjálfsögðu túlkað tónstigann frá hvaða tóni sem er og erfitt er að segja til um tónmiðju. Enda frekar stefnulítill tónstigi þó stóra tvíundin bindi enda á endurtekninguna. Hægt er að búa til pentatónískan tónstiga úr hljómnum þar sem ég hef sett stóru tvíundina í miðjuna til að undirstrika symmetrísku einkenni tónstigans. Alois Hába talaði um 2/3ndir sem 5/4 tón því tónbilið er kvarttón (¼) stærra en heiltónsbil (4/4) 4/4 + 1/4 = 5/4. Af því dró ég nafnið á tónstigann.

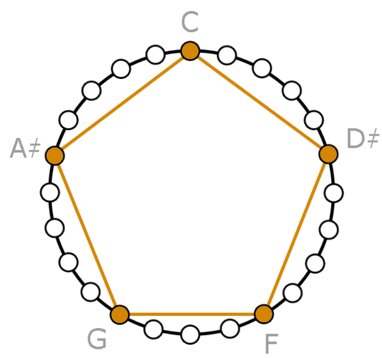


5/4 skrefa tónstiginn						
Skrefastærð	+5	+5	+4	+5	+5	
Nótur	C	D𝄲	F	G	A𝄲	C
Kvarttónar	0	5	10	14	19	24(0)
Tónbil	1nd	2/3nd	h4nd	h5nd	6/7nd	8nd

Eins og sjá má býður 2/3ndarbilið upp á tónstiga sem inniheldur engin stór eða lítil tónbil (að undanskilinni stórri tvíund milli ferundar og fimmundar). Bilið milli 2/3ndarinnar og 6/7ndarinnar er h5nd svo það myndast sterk tengsl þar á milli á meðan þessir tónar mynda fjarstæð tengsl við hina tónana í tónstiganum. Á milli h4ndarinnar og 6/7ndarinnar er 3/4nd og með tónunum viðsnúnum myndast 5/6nd. Hið sama gildir milli 2/3ndarinnar og h5ndarinnar.

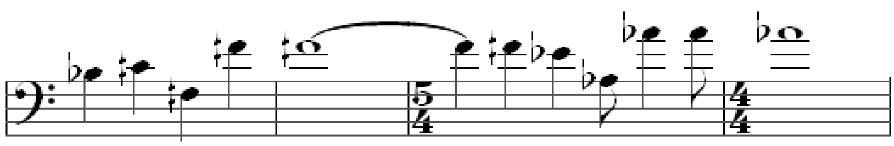
Fjöldi	Tónbil	Tilfelli í kvarttónum	Skref í tónstiganum
4	2/3ndir	(0-5, 5-10, 14-19, 19-24)	1 skref
3	h4ndir	(0-10, 14-0, 19-5)	2 skref
2	3/4ndir	(5-14, 10-19)	2 skref
1	s2nd	(10-14)	1 skref

Í tónstiganum eru fjórar 2/3ndir, þrjár hreinar ferundir, tvær 3/4ndir og ein stór tvíund, það sama gildir um fjölda andhverfra tónbila. Þetta segir okkur að tónstiginn er djúpur tónstigi þar sem hann hefur einstakan fjölda tilefna fyrir hvert tónbil í tónstiganum. Þá getum við séð að tónflutningur 5/4 skrefa tónstigans um 2/3nd myndi skila fjórum sameiginlegum tónum (af fimm) og hefur sterkust tengsl. Tónflutningur um hreina ferund hefði þrjá sameiginlega tóna, um 3/4nd hefðum við tvo sameiginlega tóna og um stóra tvíund myndi einn sameiginlegur tónn myndast.



Einnig uppfyllir 5/4 skrefa tónstiginn Myhill skilyrðið. 1 skref er s2nd eða 2/3nd og 2 skref er 3/4nd eða h4nd. Þessi tónbil eru samlæg í 24 tóna kerfinu og því uppfyllum við skilyrði fyrir hámarks dreifingu í leiðinni. Á myndinni hér til hliðar getum við séð hámarksdreifinguna á tónstiganum.

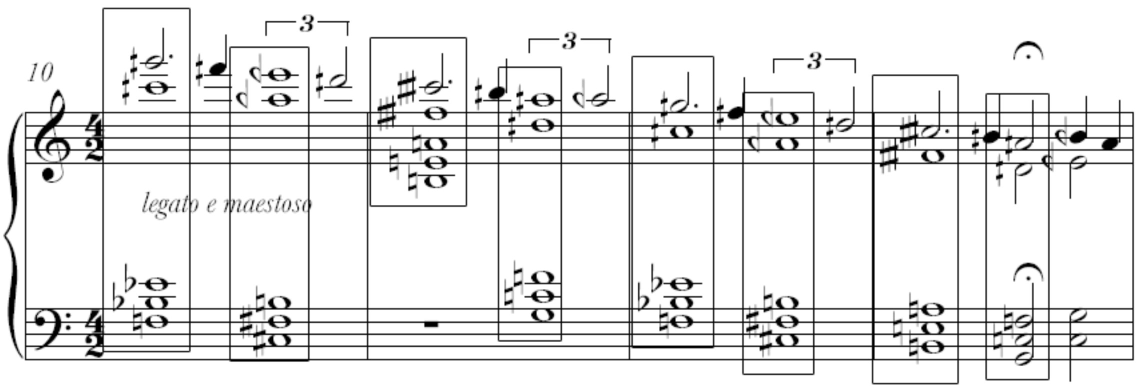
Alois Hába - Mvt. V. *Allegro risoluto; taktar 1-4*



5/4 tóna tónstigi sem er undirstaða línunnar

Hába notaði tónstigann sem melódíu í fimmta kafla básúnukvartett síns. Á myndinni hér fyrir ofan má sjá fyrstu fjóra taktana af kaflanum þar sem Hába notar fjórar 2/3ndir til að móta tónstiga fyrir línuna. Síðar tekur Hába fleiri nótur úr 2/3ndar hringnum og fjarlægist þannig tengslin við upprunalega tónstigann.

Charles Ives - Mvt. III, *Chorale*; Taktar 10-15



Í Chorale, þriðja kvarttónaverki Charles Ives, er fimm nótna hljómur eitt af byggingarefnunum en hann er byggður upp af 0 + 5 + 5 + 5 + 5 (+ 4) kvarttónum. Hljómanotkunin er merkt með römmum á myndinni hér fyrir ofan. Neðri röddin eru tvær hlaðnar, hreinar ferundir á meðan efri röddin er hrein fimmund 6/7nd frá bassatóni. Til að undirstrika ferundir eða fimmundir í hljómnum aðskilur Ives krómatísku-heimana frá hvor öðrum með því að hafa tvær áttundir á milli nótnagilda sem eru í 12 tóna kerfinu og nótnagilda sem krefjast 24 tóna. Ives er einnig með hljóma sem eru byggðir upp af 0 + 9 + 5 + 5 (+ 5) kvarttónum. Með þessu móti býr hann til hljóminn án þess að s2nd eða l7nd hljómi. Hægt væri að skipta 9 upp í 5 + 4 eða 4 + 5 sem sýnir að hljómurinn er hlutmengi af tveim 5/4 skrefa tónstigum.

Jafnskipting ferundarinnar getur einnig verið notuð í bland við hefðbundna hljóma. Alois Hába og Charles Ives bjuggu báðir til dúr hljóm með 6/7nd. Hljómurinn er eins og venjulegur dúr þríhljómur nema það er búið að skipta ferundinni frá fimmund hljómsins að grunntón í tvo jafnskipta hluta. Í hljómnum eru því 2 2/3ndir, 1 l3nd og 1 s3nd.

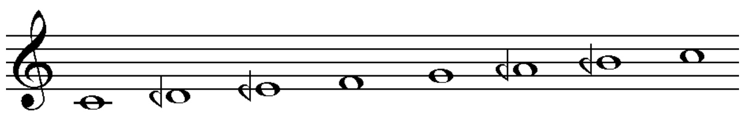
3.4.3 Jöfn skipting fimmundar (7 kvarttónar)

Ef við skiptum fimmundinni í tvennt með 24 tóna kerfinu fáum við n3nd. Sem eins og sjá má er hvorki lítið né stórt tónbil. Því væri þríhljómurinn h1ndm (0), n3nd (7) og h5nd (14) hvorki í dúr né moll og hefði jafn mikinn/lítinn skyldleika við báðar tóntegundirnar. Ef við bætum við n3nd ofan á h5ndina fáum við n7nd (21) sem er ennþá hvorki í dúr né moll. Við fáum samt fimmund á milli þríundar og sjöundar eins og er bæði í dúr og hreinum moll.

Alois Hába - Tónstiga tillaga úr Neue Harmonielehre

Alois Hába sýnir symmetrískan tónstiga sem hann byggir upp l2 + n2 + s2 + n2 + n2 + s2 + n2 + l2. Hann talar um að tónstiginn sé symmetrískur um stækkuðu ferundina. Þetta er mjög vel athugaður tónstigi hjá Hába og nær alveg eins og hlutlaus symmetrískur tónstigi sem ég sýni rétt á eftir. Ef við tökum C-ið í burtu fáum við heiltón frá H uppá C#. Þá er tónstiginn bara gerður úr s2ndum og n2ndum, þannig getur hann uppfyllt skilyrði díatónískra tónstiga. Með því að sleppa C-inu og túlka tónstigann frá F# í staðin (nótuna sem tónstiginn er symmetrískur um) fáum við hlutlausa symmetríska tónstigann.

Ef við myndum hring af n3ndum fáum við tvo fimmundahringi aðskilda með n3ndum, bein afleiðing þess að n3nd er hálf fimmund. Ef við tökum nú sjö tóna í röð úr þessum hring og röðum þeim eftir tónhæð fáum við: 0 4 7 11 14 18 og 21 kvarttón. Ef við túlkum hann frá 7. tón (21) sjáum við symmetríuna sem myndast



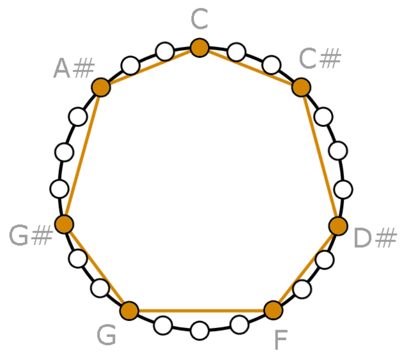
Hlutlaus Symmetrískur								
Skrefastærð	+3	+4	+3	+4	+3	+4	+3	
Nótur	C	D𝄳	E𝄳	F	G	A𝄳	H𝄳	C
Kvarttónar	0	3	7	10	14	17	21	24(0)
Tónbil	1nd	n2nd	n3nd	h4nd	h5nd	n6nd	n7nd	h8nd

Hlutlausi symmetríski tónstiginn er hið fullkomna form hlutlausu tónstiganna því öll tónbilin eru hrein eða hlutlaus. Skrefin í tónstiganum byggja á n2ndum (+3) og s2ndum (+4) til skiptis en það eru tvö n2ndar skref í röð yfir grunntóninn. Þetta er með ráðum gert til að sýna öll hlutlausu og hreinu tónbilin í samhengi. Inni í tónstiganum myndast þó ýmis önnur tónbil og tónstiginn býður uppá mikla möguleika þrátt fyrir hlutlaust útlit sitt. Tónbilin sem myndast eru eftirfarandi:

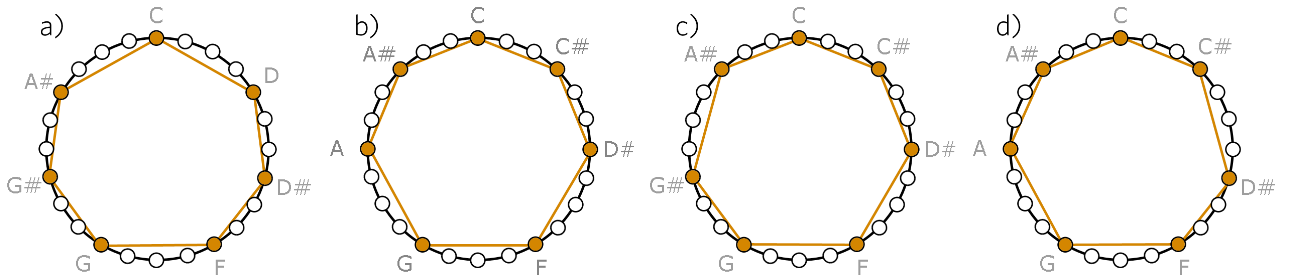
Fjöldi	Tónbil	Tilfelli	Skref
6	n3ndir	(0-7, 3-10, 7-14, 10-17, 14-21, 17-0)	2 skref
5	h4ndir	(0-10, 7-17, 14-0, 17-3, 21-7)	3 skref
4	n2ndir	(0-3, 7-10, 14-17, 21-24)	1 skref
3	s2ndir	(3-7, 10-14, 17-21)	1 skref
2	n4ndir	(3-14, 10-21)	3 skref
1	l3nd	(21-3)	2 skref

Á töflunni sjáum við hvernig tónstiginn er djúpur, hann hefur einstakan fjölda tilfella fyrir hvert tónbil. Hann uppfyllir einnig Myhill skilyrðið þar sem hann hefur tvö tónbil fyrir hvern skrefafjölda. Þessi tónbil eru einnig samlæg í 24 tóna kerfinu; n4nd -> h4nd (3 skref), n3nd -> l3nd (2 skref), n2nd -> s2nd (1 skref).

Ef við skoðum myndina hér til hliðar sjáum við dreifinguna á tónstiganum innan 24 tóna kerfis. Symmetrían verður þá augljós á sama tíma og við sjáum að tónstiginn hefur hámarks dreifingu.



3 s2ndir og 4 n2ndir móta tónstigann. Þessi tónbil eru uppistaða allra hámarks dreifðra 7 tóna tónstiga. Við getum endurraðað þessum tónbilum til að fá út aðra hámarks dreifða tónstiga sem gefa okkur möguleika á að komast í dúr og moll hljóma. Í tónstigunum verða að vera minnst tvær samliggjandi n2ndir. Við getum því búið til hópana 2 + 1 + 1, 2 + 2, 3 + 1 og 4. 2 + 1 + 1 n2nd kemur í symmetríska tónstiganum sem við vorum búin að skoða. Á myndinni hér fyrir neðan má sjá: a) 2 + 2, b) 4, c) 3 + 1, d) 3 + 1



a) og b) eru symmetrískir eins og hlutlausi symmetríski tónstiginn en þeir bjóða uppá nýja hljóma svo sem dúr og moll hljóma. Í a) og b) breytast tvær nótur frá symmetríska hlutlausa tónstiganum en í c) og d) breytist aðeins ein. c) og d) eru speglun á hvor öðrum. Í c) og d) er ójöfn skipting á bæði n2ndunum (3+1) og s2ndunum (2+1) svo ósymmetría myndast og því skiptir máli speglun tónstigans. Í c) myndast moll hljómur (C - Eb (D#) - G) og í d) myndast dúr hljómur (F - A – C).

Við það að hliðra nótum svona miskunnarlaust fjarlægjumst við einkenni díatónískra tónstiga. Myhill einkennið stenst ekki og tónstigarnir eru ekki lengur framleidd söfn af einu tónbili.

Fjöldi ákvarðar ekki lengur fjölbreytni en það myndast enn fjölbreyttari tegundir af skrefagangi. Tónstigarnir ná næstum að vera djúpir en uppfylla ekki skilyrðið.

a) Hlutlaus laghæfur								
Skrefastærð	+4	+3	+3	+4	+3	+3	+4	
Nótur	C	**D**	E𝄳	F	G	A𝄳	**B**	C
Kvarttónar	0	**4**	7	10	14	17	**20**	24(0)
Tónbil	1nd	**s2nd**	n3nd	h4nd	h5nd	n6nd	**l7nd**	h8nd
b) Hlutlaus napólískur								
Skrefastærð	+3	+3	+4	+4	+4	+3	+3	
Nótur	C	D𝄳	**Eb**	F	G	**A**	H𝄳	C
Kvarttónar	0	3	**6**	10	14	**18**	21	24(0)
Tónbil	1nd	n2nd	**l3nd**	h4nd	h5nd	**s6nd**	n7nd	h8nd
c) Hlutlaus moll								
Skrefastærð	+3	+3	+4	+4	+3	+4	+3	
Nótur	C	D𝄳	**Eb**	F	G	A𝄳	H𝄳	C
Kvarttónar	0	3	**6**	10	14	17	21	24(0)
Tónbil	1nd	n2nd	**l3nd**	h4nd	h5nd	n6nd	n7nd	h8nd
d) Hlutlaus dúr								
Skrefastærð	+3	+4	+3	+4	+4	+3	+3	
Nótur	C	D𝄳	E𝄳	F	G	**A**	H𝄳	C
Kvarttónar	0	3	7	10	14	**18**	21	24(0)
Tónbil	1nd	n2nd	n3nd	h4nd	h5nd	**s6nd**	n7nd	h8nd

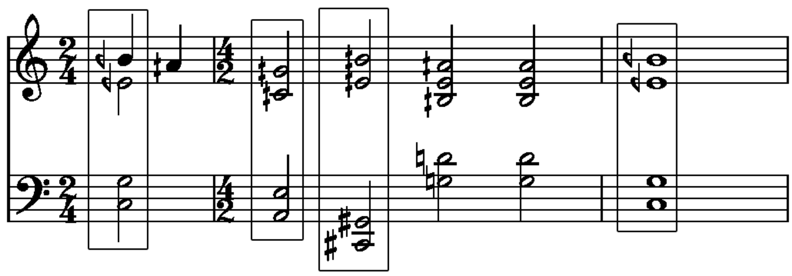
Það má sjá breyttu nóturnar feitletraðar í tónstigunum. Ég nefndi tónstigana eftir einkennum þeirra, hlutlaus laghæfur tónstigi hefur dúr, moll og hlutlausa hljóma. Hlutlaus napólískur tónstigi blandar skrefunum eins lítið og hægt er með því að setja sömu skrefastærðirnar í röð. Þetta svipar til napólíska tónstiga 12 tóna kerfisins sem hefur litlu tvíundirnar milli 7. og 1. tóns og 1. og 2. tóns. Hlutlaus moll tónstigi geymir moll þríhljóm á fyrsta sæti og hlutlaus dúr tónstigi geymir dúr þríhljóm á fjórða sæti.

Rétt eins og í 7. tóna tónstigum 12 tóna kerfisins eru hljómar byggðir á 2 skrefum áhugaverðastir. Þá eru þrí og ferhljómar hámarks dreifð hlutmengi af tónstiganum. Ég gerði töflu hér fyrir neðan sem sýnir þríhljóma á öllum sætum tónstiganna til að sýna hvernig hljómar í tónstiganum byggjast upp. Við sjáum þá að symmetríski tónstiginn hefur aðeins þríhljóma sem nýta kvarttóna. Engir krómatískir þríhljómar myndast. Þegar við búum til aðra hámarks dreifða sjö tóna tónstiga fáum við hljóma sameiginlega með krómatíska umhverfinu. Með þessu móti mætti útskýra færslu úr krómatísku umhverfi yfir í kvarttóna umhverfi. Hlutlaus laghæfur tónstigi hefur dúr, moll og hlutlaus tónbil sem gerir hann tilvalinn fyrir tilfærslu úr krómatísku umhverfi í kvarttóna. Napólískur hefur minnkaðan hljóm en engan hlutlausan, en hann hefur aðra kvarttóna hljóma.

	Symmetrískur		Moll		Laghæfur		Napólískur	
I.	n	0 7 14	moll	0 **6** 14	n	0 7 14	moll	0 **6** 14
II.	n	3 10 17	n	3 10 17	n5-	**4** 10 17	5/6-	3 10 **18**
III.	n	7 14 21	5/6+	**6** 14 21	n5+	7 14 **20**	5/6+	**6** 14 21
IV.	n	10 17 24	n	10 17 24	n	10 17 24	Dúr	10 **18** 24
V	n5+	14 21 3	n5+	14 21 3	moll	14 **20** **4**	n5+	14 21 3
VI.	n	17 24 7	n5+	17 24 **6**	n	17 24 7	mk.	**18** 24 **6**
VII.	n5-	21 3 10	n5-	21 3 10	Dúr	**20** **4** 10	n5-	21 3 10

n	Hlutlaus hljómur	0 7 14	n5+	n3nd + l3nd	0 7 13
Dúr	Dúr hljómur	0 8 14	n5-	l3nd + n3nd	0 6 13
moll	Moll hljómur	0 6 14	5/6+	s3nd + n3nd	0 8 15
mk.	Minnkaður hljómur	0 6 12	5/6-	n3nd + s3nd	0 7 15

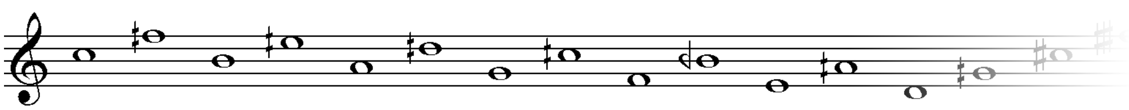
Charles Ives - Mvt. III, *Chorale*; taktar 13-15



Ef við skoðum Chorale eftir Ives sjáum við fyrsta hljóminn í dæminu byggðan upp af grunntón, h5nd, n3nd og n7nd. N3ndin og n7ndin eru spiluð í áttundinni fyrir ofan og aðskilur því Ives fimmundirnar frá hvor annarri. Þessi hljómur er grunn-byggingarefni í Chorale og er notaður frá fyrsta hljóm.

3.4.4 Krómatískir Díatónískir tónstigar (11 kvarttónar)

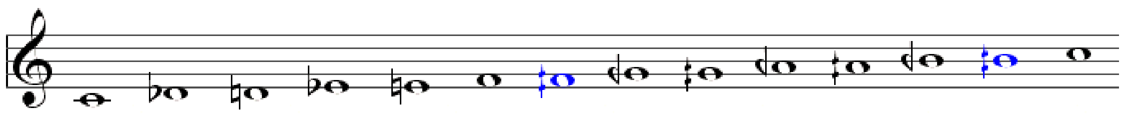
11 kvarttónar er hlutlaus ferund (n4nd). Hún liggur á milli hreinnar ferundar og stækkaðrar ferundar og skiptir stóru sjöundinni í tvennt.



Ef við framleiðum safn nótna út frá n4nd (11) fáum við n4undarhring. Hringurinn ferðast um alla 24 kvarttónanna á 11 áttundum áður en hann hittir aftur á fyrstu nótuna sína. Rétt eins og við bjuggum til 5 og 7 tóna tónstiga getum við nú búið til 11 tóna tónstiga með n4ndar hringnum:

Pentatónískur krómatískur tónstigi											
	+2	+2	+2	+2	+3	+2	+2	+2	+2	+2	+3
C	Db	D	Eb	E	F	G𝄳	G𝄲	A𝄳	A𝄲	H𝄳	C
0	2	4	6	8	10	13	15	17	19	21	24
h1nd	l2nd	s2nd	l3nd	s3nd	h4nd	n5nd	5/6nd	n6nd	6/7nd	n7nd	h8nd

Ég nefndi tónstigann að ofan pentatónískan krómatískan tónstiga því hann er byggður upp eins og pentatónískur tónstigi í 12 tóna kerfinu. Nema í stað þess að nota hreina ferund (h4nd) notum við hlutlausa ferund (n4nd). Ef við rifjum þá upp uppbygginguna penta- og díatóníska tónstiga úr kafla 3.2.1 þá var munurinn aðeins túlkunin hvort við færum í h4ndum eða h5ndum. Ef við snúm n4nd í andhverfu sína fáum við n5nd sem er 13 kvarttónar að stærð. Nú tökum við fyrstu 13 nóturnar og röðum innan áttundar, þá fáum við það sem Wyshnegradsky kallaði díatónískan krómatískan tónstiga.

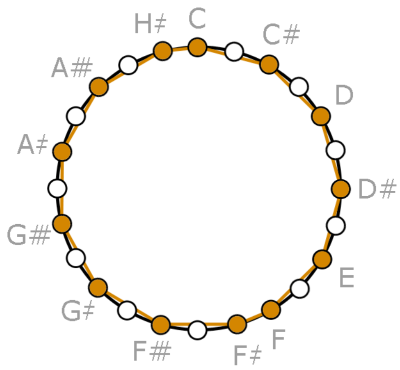


Díatónískur krómatískur tónstigi													
	+2	+2	+2	+2	+2	+1	+2	+2	+2	+2	+2	+2	+1
C	Db	D	Eb	E	F	F𝄲	G𝄳	G𝄲	A𝄳	A𝄲	H𝄳	H𝄲	C
0	2	4	6	8	10	11	13	15	17	19	21	23	24
h1nd	l2nd	s2nd	l3nd	s3nd	h4nd	n4nd	n5nd	5/6nd	n6nd	6/7nd	n7nd	7/8nd	h8nd

Tónstiginn skiptist í tvennt. Fyrst eru krómatískir tónar upp að ferund svo kvarttónn uppí n4nd og þaðan krómatískir tónar, á kvarttónum frá grunntóni, uppá 7/8nd sem er hrein fimmund frá n4ndinni. Í tónstiganum má finna öll tónbil sem til eru í 24 tóna tónlist. Það eru 13 mismunandi nótur í tónstiganum sem geta myndað 24 mismunandi tónbil. Taflan sýnir 12 mismunandi tónbil þar sem andhverfur hafa verið paraðar saman.

Fjöldi	Tónbil	Skref	Fjöldi	Tónbil	Skref
12	n4ndir	6 skref	6	2/3ndir	3 skref
11	l2ndir	1 skref	5	s3ndir	4 skref
10	3/4ndir	5 skref	4	n2ndir	2 skref
9	s2ndir	2 skref	3	h4ndir	5 skref
8	n3ndir	4 skref	2	1/2ndir	1 skref
7	l3ndir	3 skref	1	stk4nd	6 skref

Eins og taflan gefur til kynna uppfyllir tónstiginn Myhill skilyrðið. Það þýðir að hann hefur að geyma öll skilyrðin sem ég tilgreindi í kafla 3.2. Ef við skoðum tónbilin í töflunni sjáum við að öll tónbilin í 24 tóna kerfinu eru fundin í þessum tónstiga. Díatóníski krómatíski tónstiginn er minnsti tónstiginn, hefur fæstar mögulegar nótur, sem getur búið til öll tónbilin. Það sama á við dúr eða díatóníska tónstiga í 12 tóna kerfinu. Ef við skoðum myndina hér til hliðar af hámarksdreifingu díatóníska krómatíska tónstigans sjáum við hvernig uppbygging tónstigans svipar til uppbyggingar dúr tónstigans.

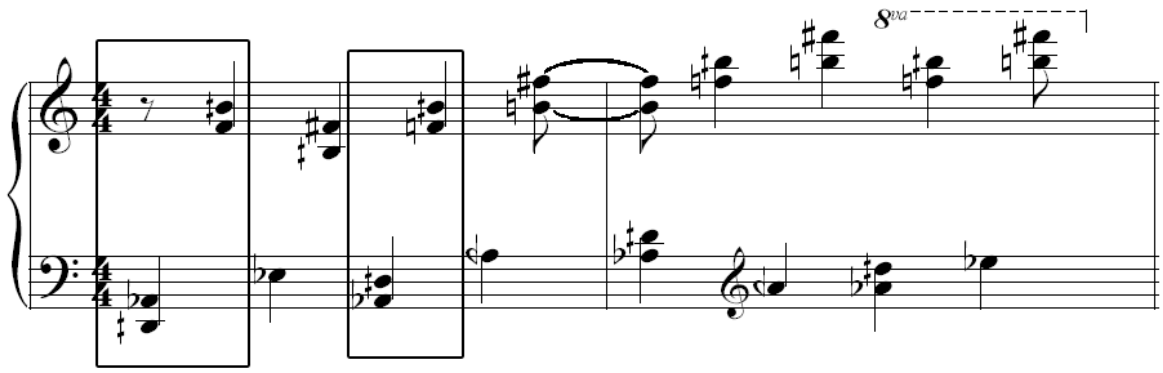


Við getum líka skoðað minni hlutmengi tónstigans til þess að fá mynd á hvernig hann gæti verið notaður. Eins og dúr tónstiginn er notaður með þrí- (dúr-, moll-, stækkuðum og minnkuðum hljómum) og ferhljómum (sjöundarhljómum) eru hámarks dreifð hlutmengi af dúr tónstiganum, þá getum við búið til hámarks dreifð hlutmengi úr díatóníska krómatíska tónstiganum sem grunn að hljómamyndun í tónstiganum.

Hámarks dreifð hlutmengi af díatóníska krómatíska tónstiganum			
Skref	Skref í hljómnum	Á I. Sæti	Tónbil
2 skref	0 2 4 6 8 10 (12)	0-4-8-11-15-19(-23)	s2-s2-n2-s2-s2(-1/2)
3 skref	0 3 6 9	0-6-11-17	l3-2/3-l3-l3(-1/2)
4 skref	0 4 8	0-8-15	s3-n3-s3(-1/2)
5 skref	0 5 10 15 (2) 20 (7)	0-10-19-4-13	h4-3/4(-3/4-3/4-h4(-1/2))
6 skref	0 6	0-11	n4-7/8(-1/2)

Á töflunni hér að ofan má sjá hvernig er hægt að búa til hljóma úr mismunandi skrefafjöldum díatóníska krómatíska tónstigans. Allir þessir hljómar hafa mismunandi tónbil eftir því hvar þeir eru staðsettir í tónstiganum. Við sjáum að tvo sex skrefa hljóma mætti finna í þriggja skrefa hljóm (0-6 og 3-9) og að tvo 4 skrefa hljóma má finna í 2 skrefa hljóm (0-4-8 og 2-6-10).

Ivan Wyschnegradsky - *Prelude No. 14;* taktar 1-2



Ef við skoðum byrjunina á verki Wyschnegradsky hér fyrir ofan sjáum við rísandi hljóma byggða á n5ndum. Hljómar byggðir á sex eða sjö skrefum í díatóníska krómatíska tónstiganum verða alltaf að n4und eða n5nd sem eru andhverf tónbil. Svo þessar n5undir eru 6 skrefa hljómar í tónstiganum H𝄲. Wyschnegradsky lætur svo hljóma aðskilda með þrem skrefum hljóma saman. Þannig byggir hann upp þrí- og ferhljóma úr þrem skrefum. Fyrsti þríhljómurinn er byggður upp H𝄲, Ab (n6) í f-lykli og F, H𝄲 (n5) í g-lykli, í grunnstöðu væri hljómurinn F, Ab, H𝄲 sem hefur þrjú skref á milli nótna. Seinni kassinn sýnir myndun ferhljóms frá H𝄲. Í f-lykli má sjá Ab, D𝄲 (n5nd) og g-lykli F, H𝄲 (n5nd). Í grunnstöðu væri hljómurinn H𝄲, D𝄲, F, Ab ferhljómur með þriggja skrefa millibili.

Díatónískur krómatískur tónstigi frá H𝄲													
	+2	+2	+2	+2	+2	+1	+2	+2	+2	+2	+2	+2	+1
H𝄲	C𝄲	C𝄰	D𝄲	D𝄰	E𝄲	F	F#	G	G#	A	A#	H	H𝄲
0	2	4	6	8	10	11	13	15	17	19	21	23	24
h1nd	l2nd	s2nd	l3nd	s3nd	h4nd	n4nd	n5nd	5/6nd	n6nd	6/7nd	n7nd	7/8nd	h8nd

Við gætum fært til 1/2undina, kvarttóns tónbilið (+1), til að búa til aðra hámarks dreifða tónstiga með 13 tónum. Það myndi skila okkur nær og nær krómatíska tónstiganum þar til kvarttóns tónbilin (+1) væru hlið við hlið. Þá værum við með krómatískan tónstiga með einum auka kvarttón milli tveggja nóta. Með því að hafa kvarttónana eins aðskilda og hægt er sbr. díatóníska krómatíska tónstigann fáum við þannig fjölbreyttustu kvarttóna einkenni í hljóma.

4. Niðurstöður

Í ritgerðinni hef ég skoðað grunn tónbilin sem myndast í 24 tóna jafnstilltu kerfi. Með því að bera saman þessi nýju tónbil við yfirtónaröðina og réttstillingu gef ég tilfinningu og tengingu milli nýju tónbilanna sem við kynnumst í 24 tóna kerfinu. Lauslega greindi ég frá skekkjum á tónbilum, tengsl við yfirtóna og túlkun okkar á kerfinu. Við það komst ég að því að ný oddatölu kvarttóna tónbil eru tengd ofar í yfirtónaröðina heldur en krómatísku tónbilin. Nýju kvarttóna tónbilin hafa þó minni skekkju frá réttstilltu hlutföllum sínum. Það mætti því lýsa nýju tónbilunum sem skýrari en fjarstæðari heldur en krómatísku tónbilin.

Ég styðst mikið við túlkun okkar á 12 tóna kerfinu til að kanna hvernig við gætum túlkað 24 tóna kerfið. Í þriðja kafla kafa ég dýpra í uppbyggingu aðferða, hljóma og tónstiga. Fyrst greini ég frá því hvernig tveir krómatískir tónstigar hafa myndast og að við komumst ekki milli þeirra án þess að smíða nýja tónstiga. Með dæmum frá Alois Hába gef ég þó mynd á að við getum notað kvarttóna melódískt án þess að bregða frá 12 tóna hljómum.

Fyrst við komumst ekki með krómatískum útskýringum í kvarttóna hljóma eða tónstiga, þá smíðaði ég nýja tónstiga og hljóma. Til að byggja upp hljóma og tónstiga í 24 tóna kerfinu tók ég fyrir mengjafræðilegar kenningar um díatóníska tónstiga 12 tóna kerfisins. Ég tók fimm þætti; framleidd söfn, djúpa tónstiga, hámarks dreifingu, „fjöldi skapar fjölbreytni“ og Myhill einkennið. Með því að byggja upp framleidd söfn nótna og skoða hvernig þau uppfylla þessi skilyrði sýni ég grunneinkenni 24 tóna kerfisins myndast. Þessi uppbygging sannar að hvert oddatölu tónbil 24 tóna kerfisins myndar tónstiga sem einkennist af sínu tónbili en hefur sömu uppbyggingu og 12 tóna tónstigar.

Með því að búa til tónstiga með öllum nýju tónbilum 24 tóna kerfisins sjáum við hvernig sömu lögmál og í 12 tóna kerfinu gilda í 24 tóna kerfinu. Þetta rökstyð ég með því að samþykkja fjarstæðari vísanir í yfirtónaröðina, 11., 13. og 15. yfirtón. Þrátt fyrir það er ég aðeins búinn að sýna notkun kvarttóna í sinni skýrustu mynd. Við getum auðveldlega losað meir um reglur og byggt upp flóknari aðferðir til að útskýra tónaval okkar og eru þá möguleikar 24 tóna kerfisins margfalt fleiri en 12 tóna kerfisins.

Heimildir

Boatwright, Howard,
“Ive's Quarter-Tone Impressions”,
Perspectives of New Music, Vol. 3, No. 2 , Síður 22-31
Perspectives of New Music, Sumar 1965

Challen, John D.,
“Quarter-Tones”,
The Musical Times, Vol. 76, No. 1107, síða 445,
Musical Times Publication Ltd., Maí 1935.

Clough, Engebretsen, and Kochavi,
“Scales, Sets, and Interval Cycles: A Taxonomy “,
Music Theory Spectrum 21, síður 74-104, 1999.

Clough, John and Douthett, Jack,
“Maximally Even Sets “,
Journal of Music Theory 35, síður 93-173, 1991.

Clough, John and Myerson, Gerald,
“Variety and Multiplicity in Diatonic Systems “,
Journal of Music Theory 29, síður 249-70. 1985

Hába, Alois,
“Neue Harmonielehre des diatonischen”, þ. Battan, Suzette Mary,
Thesis (Ph.D.)--University of Rochester, 1980.

J. Levin, Daniel,
“This is your Brain on Music”,
Dutton, a member of Penguin Group (USA) Inc., 2006

Johnson, Timothy,
“Foundations of Diatonic Theory: A Mathematically Based Approach to Music Fundamentals”,
Key College Publishing, 2003

Keislar, Douglas, Blackwood, Easly, Eaton, John, Harrison, Lou, Johnston, Ben, Mendelbaum, Joel, Schottstaedt, William,
“Six American Composers on Nonstandard Tunnings”,
Perspectives of New Music, Vol. 29. No. 1, síður 176-211
Perspectives of New Music, Winter.1991

Lukomsky, Vera og Gubaidulina, Sofia,
“The Eucharist in My Fantasy”, Viðtal við Sofiu Gubaidulinu,
Tempo, New Series, No. 206, Power, Politics, Religion... And Music, síður 19-35
Cambridge University Press, Sept. 1998

Lukomsky, Vera og Gubaidulina, Sofa,
“Hearing the Subconscious”, Viðtal við Sofiu Gubaidulinu,
Tempo, New Series, No 209, síður 27-31
Cambridge University Press, Jul 1999

Nolan, Catherine,
“Combinatorial Space in Nineteenth- and Early Twentieth-Century Music Theory”,
Music Theory Spectrum, Vol. 25, No. 2, Síður 205-241
University of California Press on behalf of the Society for Music Theory, Autumn 2003

Rappaport, David,
“Geometry and Harmony”,
School of Computing, Queen's University, Kingston, Canada

Rappaport, David,
“Maximal Area Sets and Harmony”,
School of Computing, Queen's University, Kingston, Canada

Sabameev, Leonid og Pring, S. W.,
“The Possibility of Quarter-Tone and Other New Scales”,
The Musical Times, Vol. 70, No. 1036, Síður 501-504
Muical Times Publications Ltd., 1. Jún. 1929

Skinner, Myles,
“Dissertion”,
Graduate School at the University at Buffalo, 1. Sept. 2006.

Vyslouzil, Jiri,
“A Note on Alois Hába”,
The Musical Times, Vol. 114, No. 1564, Síður 590-592
Musical Times Publications Ltd., Jun 1973

Whitman, George,
“Seminal Works of Quartertone Music”,
Tempo, New Series, No. 30 Síður 11-15
Cambridge University Press, Spring 1967