



**„Það eru fjórir og svo fékk hann þrjá
og þá eru það sjö“**

Hvaða leiðir fara fimm ára börn við að leysa
stærðfræðileg viðfangsefni?

Díana Sigurðardóttir

**Lokaverkefni til M.Ed-gráðu
Háskóli Íslands
Menntavísindasvið**

**„Það eru fjórir og svo fékk hann þrjá
og þá eru það sjö“**

*Hvaða leiðir fara fimm ára börn við að
leysa stærðfræðileg viðfangsefni?*

Díana Sigurðardóttir

Lokaverkefni til M.Ed-gráðu í sérkennslufræðum

Leiðbeinandi: Jónína Vala Kristinsdóttir

Uppeldis- og menntunarfræðideild

Menntavísindasvið Háskóla Íslands

Júní 2011

„Það eru fjórir og svo fékk hann þrjá og þá eru það sjö“. Hvaða leiðir fara fimm ára börn við að leysa stærðfræðileg viðfangsefni?

Lokaverkefni til meistaraprófs við uppeldis- og menntunarfræðideild,
Menntavísindasviði Háskóla Íslands

© 2011 Dána Sigurðardóttir
Ritgerðina má ekki afrita nema með leyfi höfundar.

Prentun: Háskólaprent
Reykjavík, 2011

Formáli

Ritgerðin er meistaraþrófsverkefni til fullnaðar M.Ed. – gráðu í uppeldis- og menntunarfræði við Menntavísindasvið Háskóla Íslands með áherslu á sérkennslu. Vægi verkefnisins er 20 ECTS einingar. Ritgerðin var unnin á árunum 2009 til 2011 og þar skoða ég hvernig fimm ára börn leysa stærðfræðileg viðfangsefni.

Leiðbeinandi minn við verkefnið var Jónína Vala Kristinsdóttir og ég vil nota tækifærið og færa henni bestu þakkir fyrir endalausa hvatningu, hlýhug, góðar og gagnlegar ábendingar og gott samstarf við ritgerðasmíðina. Sérfræðiráðgjöf við verkefnið veitti Hrönn Pálmadóttir og fær hún bestu þakkir fyrir góðar ábendingar.

Mér er einnig bæði ljúft og skylt að þakka leikskólastjóranum og deildarstjóra elstu barnanna fyrir að veita mér aðgang að leikskólanum og ekki síst vil ég þakka börnunum sem þátt tóku í rannsókninni en þeirra þáttur var forsenda þessarar rannsóknar.

Börnunum mínum, Pétri, Marteini og Guðrúnu Eddu færi ég bestu þakkir fyrir hvatningu og stuðning meðan á ritgerðarvinnu stóð. Eiginmanni mínum, Herði Svavarssyni þakka ég fyrir yfirlestur, að stappa í mig stálinu þegar illa gekk, þolinmæði og skilning hans á löngum setum mínum við tölvuna. Án alls þessa góða fólks hefði þessi ritgerð aldrei orðið til.

Hafnarfjörður í mars 2011

Díana Sigurðardóttir

Ágrip

Í þessari ritgerð er sagt frá rannsókn sem unnin var í leikskóla á höfuðborgarsvæðinu. Rannsóknin var unnin með eigindlegri rannsóknaraðferð og gagna aflað með myndbandsupptökum og skráningu á árunum 2009 til 2010. Um hentugleikaúrtak var að ræða.

Markmið rannsóknarinnar var að kanna stærðfræðiskilning fimm ára barna, hvaða stærðfræði þau beita í leik og starfi, hvernig börn á þessum aldri leysa stærðfræðileg viðfangsefni og hvernig einstaklingsmunur milli barna birtist. Til að fá sem gleggsta mynd af leiðum barnanna voru þau bæði skoðuð í leik og þegar þau unnu að ýmsum stærðfræðiverkefnum með kennara. Tilgangurinn er að niðurstöðurnar geti nýst mér sem sérkennslustjóra og öðrum leikskólakennurum í starfi sínu með börnum.

Í fræðilegum bakgrunni er fjallað um rannsóknir á stærðfræðinámi ungra barna og hvernig stærðfræðiskilningur ungra barna þróast. Að auki er gerð grein fyrir hlutverki kennara og þeim ramma er umlykur leikskólann.

Helstu niðurstöður eru að börnin eru fær um að leysa margskonar stærðfræðileg viðfangsefni og þau eru áhugasöm þegar kemur að stærðfræði. Börnin leika sér í fjölbreyttum stærðfræðitengdum leikjum, sýna samvinnu og eru dugleg að nýta umhverfi sitt. En þrátt fyrir að flest börn þrói stærðfræðihugsun sína í gegnum leik með öðrum börnum þá er því ekki þannig farið hjá öllum börnum og því mikilvægt að kennarar tryggji að öll börn öðlist reynslu af stærðfræði.

Abstract

“That is four and then he got three and that makes it seven”

What strategies do children use when solving mathematical problems?

This thesis reports a research project conducted at a preschool in the greater city area. Qualitative research methods were used and data was collected with video recordings that were observed and analyzed during 2009-2010. Participants were selected from a group of children that were accessible to the researcher.

The aim of the research was to assess the mathematical understanding of five years old children and what type of mathematical strategies they use in play and learning, to explore how children at this age solve mathematical projects and how individual difference manifest themselves. To obtain a clear image of the different strategies the children used, they were observed playing as well as working on different mathematical problems with a teacher. The aim was also for me to be able to use the conclusions of the research in my position as a special needs manager for them to be of use to preschool teachers in their work with children.

A literature review explores previous research on how young children learn mathematics and how their understanding develops. In addition the role of the teacher is defined as well as the framework surrounding preschools.

The major conclusions are that children are able to solve varied mathematical problems and they are interested in mathematics. Children play diverse mathematical games, show cooperation and are resourceful in using their environment and materials in diverse ways. But despite the fact that most children develop their mathematical thinking through games played with other children this is not the case with all children and thus it is important that teachers ensure that all children are exposed and able to obtain experience in mathematics.

Efnisyfirlit

Formáli	3
Ágrip.....	5
Abstract.....	7
Efnisyfirlit.....	10
1 Inngangur	13
2 Nám barna í leikskóla.....	15
2.1 Leikurinn	15
2.2 Námskenningar	18
2.3 Aðalnámskrá leikskóla.....	22
2.4 Aðalnámskrá grunnskóla – stærðfræðihluti	25
2.5 Skólanámskrá	26
2.6 Kennarinn.....	28
2.7 Heildarsamantekt.....	35
3 Skilningur ungra barna á stærðfræði	37
3.1 Stærðfræði í leik.....	38
3.2 Talnaskilningur ungra barna	40
3.3 Að telja í runu.....	42
3.4 Að skrifa tölustafi.....	43
3.5 Skilningur á reikniaðgerðum.....	44
3.6 Rúmfræði.....	50
3.7 Stærðfræðierfiðleikar	52
3.8 Tengsl milli lestrar/málerfiðleika og stærðfræðierfiðleika ...	55
4 Rannsóknin.....	57
4.1 Rannsóknaraðferð	57
4.2 Rannsóknarspurningin.....	57
4.3 Þátttakendur.....	58

4.4	Gagnaöflun.....	58
4.5	Skráning og úrvinnsla gagna.....	60
4.6	Siðferðileg atriði.....	61
4.7	Trúverðugleiki.....	62
5	Niðurstöður rannsóknarinnar	63
5.1	Einstaklingsverkefni.....	63
5.1.1	Að telja hluti.....	63
5.1.2	Að telja í runu.....	64
5.2	Hópverkefni með kennara	64
5.2.1	Samlagning.....	65
5.2.2	Margföldun.....	66
5.3	Í leik	67
5.3.1	Samlagning.....	68
5.3.2	Flokkun og form.....	69
6	Umræður	71
6.1	Einstaklingsverkefni - Telja hluti.....	72
6.1.1	Gísli (5 ára).....	72
6.1.2	Ásgeir (5 ára og 3 mánaða).....	73
6.1.3	Rut (5 ára)	73
6.1.4	Samantekt.....	73
6.2	Að telja í runu.....	74
6.3	Hópverkefni með kennara	75
6.3.1	Samlagning.....	75
6.3.2	Margföldun.....	77
6.3.3	Samantekt.....	79
6.4	Í leik	80
6.4.1	Samlagning í leik.....	80
6.4.2	Rúmfræði í leik	81
6.4.3	Samantekt af leik.....	82
6.5	Lærdómar af niðurstöðum rannsóknarinnar.....	83
7	Lokaorð	85
	Heimildaskrá.....	87

1 Inngangur

Undanfarin ár hafa margar rannsóknir verið gerðar á stærðfræðinámi ungra barna. Þessar rannsóknir hafa leitt í ljós að ung börn hafa áhuga á stærðfræði, þau eru fær um að leysa flókin viðfangsefni og þekking þeirra er yfirgripsmeiri en áður var haldið (Sarama og Clements, 2009). Rannsóknir hafa einnig sýnt að börn á leikskólaaldri leika sér mikið í stærðfræðitengdum leikjum. En þrátt fyrir að rannsóknir sýni fram á stærðfræðilega færni ungra barna og að þau öðlist stærðfræðilega þekkingu í frjálsum leik er mikilvægt að hafa í huga að þannig er málum ekki háttáð með öll börn (Perry, Young-Loveridge, Dockett og Doig, 2008). Þar kemur að hlutverki kennarans. Hann þarf að vera meðvitaður um þróun stærðfræðihugsunar ungra barna til að geta veitt þeim verkefni og stuðning við hæfi (Baroody, 2004b).

Í meira en tuttugu ár hef ég unnið með börnum á leikskólaaldri og í starfi mínu hef ég einbeitt mér að málþroska, orðaforða og þróun læsis hjá börnum. Ég hafði ekki hugsað eins markvisst um stærðfræði eða unnið sérstaklega með þá grein. Fyrir tæpum fimm árum útskrifaðist ég sem sérkennari og hef síðan þá unnið sem sérkennslustjóri í leikskóla. Í kjölfar þess fór talnaskilningur og stærðfræðiþekking barna almennt að vekja áhuga minn. Ég sá að töluverður munur var á milli barna hvað varðar skilning og getu varðandi tölur. Ég varð að viðurkenna þekkingarleysi mitt á þessu sviði og fór í kjölfarið á námskeið í framhaldsdeild H.Í. um þróun stærðfræðihugmynda ungra barna og eftir það varð ekki aftur snúið. Áhugi minn á stærðfræði var vakinn og í kjölfarið ákvað ég í meistaráritgerð minni að vinna að rannsókn á sviði stærðfræðináms ungra barna í leikskóla til að dýpka þekkingu mína enn frekar.

Í þessari rannsókn skoða ég hvaða leiðir fimm ára börn í leikskóla fara við að leysa stærðfræðileg viðfangsefni. Markmiðið er að kanna stærðfræðiskilning fimm ára barna og hvaða stærðfræði þau beita í leik og starfi, kanna hvernig börn á þessum aldri leysa stærðfræðileg viðfangsefni og hvernig einstaklingsmunur milli barna birtist. Til þess að fá sem gleggsta mynd af leiðum barnanna ákvað ég að leggja fyrir þau verkefni einstaklingslega, í hóp og fylgjast með þeim saman í leik. Tilgangurinn er sá að niðurstöðurnar geti nýst leikskólakennurum í starfi.

Með hliðsjón af ofangreindum markmiðum valdi ég eftirfarandi rannsóknarspurningu:

- Hvaða leiðir fara fimm ára börn við að leysa stærðfræðileg viðfangsefni?

Ritgerðin skiptist í sex kafla auk ágríps, formála og lokaorða. Fyrsti kaflinn er inngangur þar sem rök eru færð fyrir vali á verkefninu og tilgangi og markmiðum lýst. Kafli tvö fjallar um nám barna í leikskóla. Þar er rætt um hlutverk leiksins sem námsleiðar barna og gerð grein fyrir nokkrum áhrifamiklum kennismíðum á sviði kennslufræða. Einnig er fjallað um nógildandi aðalnámskrá leikskóla og drög að nýrri námskrá leikskóla sem taka á gildi haustið 2011. Sjónarhornið er stærðfræði og því er einnig fjallað um aðalnámskrá grunnskóla – stærðfræðihluta á yngsta stigi. Að lokum er gerð grein fyrir hlutverki kennarans í stærðfræðinámi ungra barna

Í þriðja kafla er gerð grein fyrir fræðilegum bakgrunni varðandi skilning ungra barna á stærðfræði. Umfjöllunin skiptist í stærðfræði í leik, talnaskilning ungra barna, að telja í runu, að skrifa tölustafi, skilning á reikniáðgerðum, rúmfræði, stærðfræðierfiðleika og tengsl milli lestrar/málerfiðleika og stærðfræðierfiðleika.

Í fjórða kafla er fjallað um rannsóknaraðferðina, val á þátttakendum, hvernig gagna var aflað, greiningu og úrvinnslu gagna, fjallað um siðferðileg álitamál og trúverðugleika rannsóknarinnar. Í tveimur síðustu köflunum eru niðurstöður rannsóknarinnar kynntar og ræddar.

2 Nám barna í leikskóla

Í þessum kafla er fjallað um hlutverk leiksins sem námsleiðar barna. Einnig verður gerð grein fyrir nokkrum kennismíðum sem allir hafa verið áhrifamiklir á sviði kennslufræða og í menntun leikskólakennara hér á landi. Fjallað er um nágildandi aðalnámskrá leikskóla (1999) og gerð grein fyrir drögum að aðalnámskrá leikskóla sem taka á gildi haustið 2011. Þar sem sjónarhornið er stærðfræðileg viðfangsefni ungra barna fjalla ég einnig um aðalnámskrá grunnskóla – stærðfræðihluta með yngsta stigið að leiðarljósi. Að lokum er gerð grein fyrir hlutverki kennarans.

2.1 Leikurinn

Leikurinn er hornsteinn leikskólastarfs segir í aðalnámskrá leikskóla (1999) enda er leikurinn mikilvægasta náms- og þroskaleið barnsins og ekki er um beina kennslu að ræða í leikskólum. Hér verður því fjallað um leikinn sem námsleið barna.

„Þú kynnist manneskju betur á einni klukkustund í leik en af samtölum í heilt ár“ (Platón, án bls., án árs).

Hér er vitnað í gríska heimspekinginn Platón (427-347 f. Kr.) en ein elsta heimild um leikinn er hægt að rekja aftur til rita hans. Platón ásamt Aristóteles (384-322 f. Kr.) benti á að leikur væri undirstaða alls náms og leggja ætti áherslu á að kenna börnum á skemmtilegan hátt (Símon Jón Jóhannsson og Bryndís Sverrisdóttir, 1990).

Í aðalnámskrá leikskóla segir að leikurinn sé lífstjáníning barna og að hann sé sjálfsprottinn og börnum eðlislægur þar sem þau leika sér af fúsum og fjálsum vilja. Í gegnum leikinn læra börn margt sem ekki er hægt að kenna og þar skapast tækifæri fyrir þau til að læra og skilja umhverfi sitt, tjá sig og þróa félagsleg tengsl við önnur börn. En börn eru líka náms- og verkfús og hafa þörf fyrir að takast á við verkefni sem reyna á færni þeirra. Með hverju ári vex þor, þróttur og úthald barna og í gegnum leik geta börnin þróað hugmyndir sínar og byggt upp nýjan skilning og þekkingu. Þrátt fyrir að börn læri mikið hvert af öðru í leik er hlutverk hins fullorðna í leik barna ekki síður mikilvægt. Því til áherslu er bent á að leikskólakennarar eigi að tryggja börnum fjölbreytilegt

leikumhverfi, veita þeim aðgengi að leikefni og örva eða taka þátt í leikum á forsendum barnanna (Menntamálaráðuneytið, 2010a).

Margir fræðimenn hafa rannsakað og sett fram kenningar sínar um hlutverk leiksins sem námsleið hjá ungum börnum. John Dewey (1859-1952) sagði að börn öðluðust menntun í gegnum reynslu sína (e. *Learnig by doing*) en ekki af beinni kennslu. Hann sagði að barnið skapaði þekkingu sína út frá reynslu sem hefði tilgang og væri mikilvæg í huga barnsins. Hann sagði jafnframt að leikurinn ætti að vera sprottinn af náttúrulegri hvöt og áhuga barnsins (Dewey, 1938). Jean Piaget (1896-1980) talaði um uppgötvunarnám þar sem þekking fæst með því að handleika eða fást við raunveruleg verkefni þar sem börnin fá að prófa hugmyndir sínar. Piaget vildi að börn fengju góðan samfelldan tíma til leiks og rannsókna og það væri í verkahring hinna fullorðnu að skapa viðeigandi leikumhverfi fyrir börnin. Hann sagði að ef kennarar fylgdust með leik barna gæfi það þeim vísbendingu um vitsmunalegan þroska þeirra og hvar þörf væri fyrir stuðning (Pound, 2005). Lev Vygotsky (1896-1934) lagði sitt af mörkum varðandi skilning manna á leik barna. Hann lagði áherslu á hið félagslega og notkun tungumálsins. Hann sagði að barnið áttaði sig á félagslegum reglum í gegnum leik og að vitrænn þroski barna eflist í samskiptum við aðra. Vygotsky lagði einnig mikla áherslu á hlutverk hinna fullorðnu eða getumeiri einstaklinga í námi yngri barna (Pound, 2005). Bruner (1915-) segir að í leik gefist börnum tækifæri til að þroska hæfileika sína og hegðun í öruggu umhverfi. Rannsóknarleikir þar sem börn gera tilraunir með efnivið og félagsleg samskipti, hvetja þau áfram til að tileinka sér þær reglur sem gilda í samfélaginu sem þau lifa í og eru því gagnlegir fyrir barnið (Sylva, Roy og Painter, 1980).

Perry og Docett (2008) segja að það sé nauðsynlegt að þekkja mikilvægi náms á bernskuárunum en það sé ekki síður mikilvægt að muna að mikið af þekkingaröflun ungra barna á sér stað við hversdagslegar aðstæður eins og í samskiptum og í leik. Perry og Dockett (2004) bentu á að leikurinn væri mikilvægur varðandi þróun stærðfræðiskilnings hjá ungum börnum vegna þess að:

- Leikurinn getur bæði speglað núverandi stöðu barna og gefið tækifæri til að efla þroska þeirra.

- Leikurinn gefur barninu tækifæri til að mæta mismunandi sjónarmiðum og skilningi.
- Leikurinn gefur börnum tækifæri til samskipta við aðra sem hafa meiri reynslu eða þekkingu, þar sem hinir getumeiri veita aðstoð.
- Þekking verður til mun fyrir þegar tilgangurinn er ljós og það er hann alltaf í leik barna.
- Leikurinn gefur tækifæri til að tengja óhlutbundnar stærðfræðilegar hugmyndir áþreifanlegum þætti.
- Leiknum er stýrt af þeim sem eru að leika sér. Þar takast börnin á við vandamál sem upp koma og beita fjölbreyttum aðferðum til að finna lausn.
- Leikurinn er sá tími þar sem börn efla skilning sinn eða kanna viðfangsefni (Perry and Dockett, 2008).

Leikurinn er vinna barnsins sem það notar til að skilja umhverfið í kringum sig og læra. Í leik geta börn prófað hluti án þess að það ógni þeim líkamlega eða tilfinningalega því þau eru örugg þar sem þau eru bara að leika sér. Börn þurfa ekki leiðbeiningar varðandi leikinn þau einfaldlega gera það sem þeim finnst skemmtilegt (Brown, 2009). Börn eru líkleg til að þróa flókna leiki í umhverfi þar sem þau vita að mistök eru leyfð, þar sem viðleitni þeirra er virt, þau eru hvött áfram og þar sem þau vinna á þroskandi hátt í samvinnu með einstaklingum sem skipta þau máli. Vygotsky leit svo á að í leik væri búið til svæði mögulegs þroska (ZPD) þar sem börnin eru áhugasöm að læra og eru hvött áfram af reynslumeiri einstaklingum. Leikurinn er mikilvægt tæki fyrir nám barna þrátt fyrir að hann sé ekki eina leiðin (Perry og Dockett, 2007).

Leikur barna hefur alltaf tilgang þó hann sé ekki alltaf sýnilegur hinum fullorðna. Í leik þroskast börn vegna fyrri reynslu, af hvatningu frá öðrum einstaklingum og af efniviðnum og öðlast þannig nýja þekkingu og færni. Leikur er ríkjandi athöfn hjá börnum á leikskólaaldri og þau geta einbeitt sér tímunum saman í sjálfsprottnum leik, hann gefur börnum líka tækifæri til að vera við stjórn og finna hæfni sína. Börn reyna að varpa ljósi á sinn eigin heim sem oft á tíðum getur verið ruglingslegur fyrir ung börn. Vygotsky sagði að í leik mætti segja að börn yrðu höfðinu

hærri en þau væru í raun og veru. Allir kennarar sem taka sér tíma til að fylgjast með ungum börnum í leik vita nákvæmlega við hvað ég á, sagði hann jafnframt. Leikurinn ætti því að vera kjörinn vettvangur fyrir fullorðna að fylgjast með börnunum í sinni mestu færni, kynnast hugmyndum þeirra, áhyggjum og áhugamálum (Pound 2005).

2.2 Námskenningar

Piaget skilgreindi fjögur skeið varðandi vitsmunabroska mannsins:

- Skyn- og hreyfiskeið 0-2 ára (e. sensorimotor stage)

Á þessu stigi skynjar og skilur barnið umheiminn í gegnum hreyfifærni og með því að beita skynfærum eins og sjón, bragði, snertingu og lykt.

- Foraðgerðarstig 2-6 ára (e. preoperational stage)

Á þessu stigi lýsir barnið hugmyndum og hlutum með orðum og leikur sér í ímyndunarleikjum. Rökhugsun barnsins er byggð á ófullkominni þekkingu og það skilur umheiminn út frá eigin sjónarhorni.

- Stig hlutbundinna aðgerða 7-11 ára (e. concrete operational stage).

Rökhugsun þroskast á þessu aldurstigi og barnið beitir henni til að túlka reynslu sína eða skynjanir. Rökhugsun er þó oftast bara beitt við eitthvað sem hægt er að sjá eða er áþreifanlegt.

- Stig formlegrar aðgerða frá 12 ára til fullorðinsaldurs (e. formal operational stage).

Piaget segir að þetta stig einkennist af skipulagðri hugsun og stöðugt meiri rökhugun.

Hjá Piaget var barnið miðpunkturinn en Vygotsky horfði á mikilvægi hlutverks uppeldis og kennslu og möguleika til að hafa áhrif á þroska barnsins. Vygotsky lagði áherslu á tungumálið og hve miklu hlutverki það gegnir í þróun óhlutbundinnar hugsunar. Hann fjallaði líka um vægi

félagslegs umhverfis þ.e. að bæði hlutir og fólk væru mikilvægt afl í þroska hugsunar (Pound, 2005). Piaget og Vygotsky lögðu báðir áherslu á þroskaferil barnsins en Piaget beindi sjónum sínum að líffræðilegum þáttum til að skýra almenn lögmál þroskans á meðan áhersla Vygotsky beindist að samspili félagslegra aðstæðna og líffræðilegra þátta (John-Steiner og Souberman eftirmáli í Vygotsky, 1978). Vygotsky taldi hlutverk tungumálsins tvíþætt, annars vegar væri um að ræða félagslegt mál sem ætti sér stað í samskiptum milli fólks og hins vegar hið innra tal þar sem barnið talaði við sjálf sig. Barninu tekst að umbreyta félagslegri hegðun yfir í persónulega hegðun þegar það fer að nota það mál sem það hefur lært í félagslegu samhengi til að stýra gerðum sínum (Vygotsky, 1978). Bruner tekur í sama streng og Vygotsky og hefur í skrifum sínum beint sjónum að tengslum móður og barns. Hann telur hið félagslega samspil milli fullorðins og barns mikilvægt en það felst m.a. í leik sem síðan er studdur áfram með tungumálinu (Pound, 2005).

Vygotsky sagði að félagslegur og vitsmunalegur þroski ynnu saman og hann taldi félagsleg samskipti gegna lykilhlutverki við myndun þekkingar (Pound, 2005). Vygotsky vildi að sama leið yrði farin í kennslu barna með fötlun og kennslu ófatlaðra barna þ.e. að efla félagsleg samskipti þeirra við fullorðna og önnur börn. Hann sagði að það ætti alls ekki að einangra þau frá öðrum t.d. inn í sérkennsluherbergjum heldur ætti barnið að taka sem mestan þátt í öllu hefðbundnu starfi. Vygotsky taldi að kennsla barna með fötlun ætti að hafa sömu markmið og barna án fötlunar (Berk og Winsler, 1995).

Kenningar Bruner gera ráð fyrir hæfileikum eða getu einstaklingsins (Pound, 2005). Bruner sagði að vitsmunaleg þroski barna færi í gegnum þrjú stig:

- Við athöfn (e. enactive mode). Barnið byrjar að þróa skilning sinn með því að snerta á viðfangsefninu eða skoða það. Barnið leikur sér með hlutinn til að skilja til fulls hvernig hann virkar.
- Við ímyndun (e. iconic mode). Einn hlutur getur staðið fyrir annan t.d. þegar barnið notar banana fyrir símtól.
- Í gegnum tákni og mál (e. symbolic mode). Barnið getur metið, dæmt og hugsað á gagnrýninn hátt. Notar óhlutbundna hugsun (Clabaugh, 2010).

Dewey sagði að nám byggðist á athöfn. Hann taldi mikilvægt að það sem börnin lærðu í skólanum væri tengt við lífið fyrir utan skólann og þessir tveir heimar nálguðust hvor annan og ynnu saman. Það sem börnin lærðu í skólanum ættu þau að geta notað utan hans og öfugt (Bradford, Brown og Cocking, 2000). Dewey sagði að börn ættu að læra af eigin reynslu og áhuga en ekki af beinni kennslu. Áhugi barna er forsenda alls náms og leikurinn er leið að þroska og menntun. En leikurinn verður að vera sprottinn af náttúrulegri hvöt og áhuga barnsins. Hann vildi að börn fengju að þróa áhuga sinn og fengju viðfangsefni við hæfi (Pound, 2005). Bruner er sama sinnis og segir að barn verði að þekkja viðfangsefni sitt fyrst til að skilja það. Hann segir að kennsla verði að vera í samræmi við reynslu barnsins og vera lögð fyrir á einfaldan hátt í byrjun en síðan megi dýpka hana (Clabaugh, 2010).

Dewey lagði áherslu á að kennarar þekktu börnin vel og rannsökuðu þroska þeirra til að geta unnið námsáætlun sem hæfði aldri þeirra og þroska. Hann vildi einnig að kennarar byggju yfir góðri almennri þekkingu og vildu læra meira þar sem þekking og reynsla kennarans er mikilvæg (Pound, 2005). Ábyrgð kennarans liggur í því að leggja fyrir viðfangsefni sem tekur mið af þeirri reynslu sem fyrir er og henta hæfileikum barnsins. Þær nýju staðreyndir eða hugmyndir sem fást á þann hátt verða síðan grunnur að frekari reynslu eða athöfnum þar sem ný viðfangsefni eru tekin fyrir. Barnið þarf að vita að það má gera mistök og að mistök eru til að læra af þeim (Dewey, 2000b). Piaget lagði áherslu á að aðlaga yrði kennslu og námsumhverfi að þroskastigi barnsins og forðast að leggja fyrir of þungt efni heldur ætti að kenna nýja færni eða hugsun á því stigi sem barnið væri stött hverju sinni (Pound, 2005). Bruner er sammála Piaget og segir að það sé hægt að kenna börnum hvað sem er, sama á hvaða þroskastigi þau eru stödd bara ef það er gert á viðeigandi hátt (Pound, 2005).

Eitt mikilvægasta hugtakið frá Vygotsky er „zone of proximal development“ (ZPD) sem þýtt hefur verið á íslensku „svæði mögulegs þroska“. Þetta hugtak getur átt við um hvaða færni sem er en það felur í sér muninn á því sem barn getur gert án hjálpar annars vegar og hins vegar hvað það getur gert með aðstoð frá fullorðnum eða í samvinnu við getumeiri jafninga (Vygotsky, 1978). Þegar barn nær sjálft tókum á viðfangsefninu sem var á svæði mögulegs þroska heldur það áfram á

annað svæði til að öðlast tök á nýrri færni. Vygotsky sagði að lykilatriðið væri ekki eingöngu áhugi barnsins og skilningur heldur einnig færni þess til að læra með hjálp eða í samvinnu við aðra. Barn á auðveldara með að tileinka sér námið þegar það fær tækifæri til að ræða viðfangsefnið við aðra manneskju, einhvern sem hefur meiri þekkingu á efninu hvort sem um er að ræða barn eða fullorðinn (Pound, 2005).

Annað hugtak hjá Vygotsky sem tengist svæði mögulegs þroska er „scaffolding“ eða stuðningur. Með notkun hugtaksins stuðningur í námi er átt við þá aðstoð sem barn þarf til að geta náð árangri þ.e. barnið fær tækifæri til að þroskast frá færni sem er háð öðrum yfir í færni sem barnið ræður við eitt og óstutt (Pound, 2005). Stuðningurinn auðveldar barninu að ná árangri á svæði síns mögulega þroska og er eingöngu veittur þegar barnið þarf á að halda. Vygotsky taldi mikilvægt að kennarar væru meðvitaðir um þroska barns og veldu út frá þeirri niðurstöðu viðfangsefni og athafnir sem leitt gætu barnið til áframhaldandi þroska. Hlutverk hins fullorðna er mjög mikilvægt, að mati Vygotsky, sé litið til vitsmunarþroska barna, félagsþroska þeirra og þeirrar kunnáttu sem þau búa yfir (Pound, 2005). Bruner telur eins og Vygotsky að árangursrík kennsla eigi að innihalda stuðning (e. scaffolding). Börnin byggja þannig upp skilning sinn og með aðstoð verði þau sjálfstæðir nemendur. Kennarar eiga að styðja þannig við nemendur að þeir byggja ofan á þekkingu sína og fái hvatningu til að hugsa sjálfstætt. Þekking er ferli ekki framleiðsla (Clabaugh, 2010). Bruner segir að þekking sé ferli þar sem ný þekking sé byggð á fyrri reynslu.

Dewey lagði áherslu á að virkja nemendur og vekja áhuga þeirra og einkunnarorð hans voru „learning by doing“. Hann stofnaði Tilraunaskólann (e. The Laboratory School) eða Dewey-skólann árið 1896. Í Dewey-skólanum var snúið baki við utanbókarlærdómi en byggt á samvinnu við lausn verkefna undir leiðsögn kennara sem átti að sjá til þess að börnin hugsuðu um það sem þau væru að gera og spyrðu spurninga. Kjarninn í námi yngri barna voru verklegar greinar (Dewey 2000a).

Bruner vildi bæta námskrá í skólum og setti fram hugmynd sína um spíral-námskrá (e. spiral curriculum) um 1960 (Pound, 2005). Hann byggir námskrá sína á kenningum Piaget þar sem hann leggur áherslu á mikilvægi þess að kennarar setji fram það sem barnið á að læra þannig að það henti þroskastigi barnsins hverju sinni. Námskrána má hugsa eins og

gorm þar sem ný þekking byggir stöðugt á því sem barnið hefur áður lært þ.e. nám er ferli. Kennslan á að ganga út frá fyrri reynslu barnsins og vera þroskahvetjandi (Þuríður Jóna Jóhannsdóttir, 2001b).

Hugsmíðahyggja (e. constructivism) tekur tillit til forþekkingar nemandans þar sem gengið er út frá því að ný þekking byggist á fyrri reynslu. Einnig er gengið út frá virki þátttöku nemandans í uppbyggingu þekkingar. Til að svo megi verða þarf kennarinn að huga að því að nemandinn fái viðfangsefni sem eru áhugaverð og að hann sjái tilgang í að afla sér þeirrar þekkingar sem nauðsynleg er til að leysa verkefnið. Áhersla er lögð á að verkefni séu í samhengi við raunveruleikann. Hlutverk kennarans er að vera góð fyrirmynd, skapa auðugt námsumhverfi og vera styðjandi bæði við hópinn og einstaklinginn (Þuríður Jóhannsdóttir 2001a). Hugmyndafræði hugsmíðahyggju er gjarnan skipt í tvo flokka: félagslega hugsmíðahyggju (e. social constructivism) og vitræn hugsmíðahyggju (e. cognitive constructivism). Vitræn hugsmíðahyggja á rætur sínar að rekja til Piaget þar sem sjónum er beint að einstaklingnum og hvernig hann tileinkar sér þekkingu. Þar er hlutverk kennarans að styðja við einstaklinginn og tryggja að hann fái verkefni við hæfi. Félagsleg hugsmíðahyggja á rætur að rekja til Vygotsky sem leggur áherslu á félagslega og menningarlega þætti þegar kemur að uppbyggingu þekkingar. Vygotsky segir tungumálið gegna mikilvægu hlutverki og að þekking verði til í samskiptum við aðra. Hann segir jafnframt að til staðar þurfi að vera viðeigandi stuðningur fyrir nemendur og sá stuðningur geti komið frá kennara, jafningum eða hlutum úr umhverfinu (Kalina og Powell, 2009).

Í grundvallaraatriðum er nálgun hugsmíðihyggjunnar varðandi kennslu og námsumhverfi upprunnin frá sálfræðingum og kennurum á borð við Bruner, Piaget, Dewey og Vygotsky. Þrátt fyrir að þessir fræðimenn hafi tvö mismunandi sjónarhorn þ.e. annars vegar félagslega hugsmíðahyggju og hins vegar vitræna hugsmíðahyggju og eitthvað beri þar á milli hafa þeir sömu sýn hvað varðar námsumhverfi (Chu og I, 2010).

2.3 Aðalnámskrá leikskóla

Með lögum frá Alþingi 1994 var leikskólinn gerður að fyrsta skólastiginu. Segja má að leikskólinn hafi nokkra sérstöðu sem fyrsta skólastigið þar sem ekki er um skyldunám að ræða en tölur frá Hagstofu

Íslands sýna þó að 4.087 fimm ára börn voru í leikskóla árið 2009 eða tæplega 96% allra fimm ára barna á Íslandi (Hagstofa Íslands, 2011). Að auki er skólaárið lengra í leikskólum en á öðrum skólastigum eða að jafnaði ellefu mánuði á ári. Fimm árum eftir að leikskólinn var formlega gerður að fyrsta skólastiginu árið 1999 leit Aðalnámskrá leikskóla dagsins ljós og þar voru sett fram markmið sem leikskólum ber að uppfylla.

Aðalnámskrá leikskóla er sett af menntamálaráðherra með sama hætti og reglugerðir og skulu leikskólakennarar og rekstraraðilar taka mið af henni. Hún lýsir sameiginlegum markmiðum og kröfum sem eiga við um allt leikskólastarf.

Aðalnámskrá leikskóla er stefnumótandi leiðarvísir um uppeldisstörf í leikskólum og á að mynda sveigjanlegan starfsramma. Á grundvelli þessa leiðarvísis á sérhver leikskóli að gera eigin skólanámskrá. (Menntamálaráðuneytið, bls. 8, 1999).

Samkvæmt aðalnámskrá eiga meginmarkmið leikskólauppeldis að vera að efla alhliða þroska barna í samræmi við eðli og þarfir hvers og eins þannig að börnin geti notið æsku sinnar. Leggja á áherslu á að veita börnunum umönnun og búa þannig um hnúta að þau hafi örugg leikskilyrði með öðrum börnum undir leiðsögn leikskólakennara og leggja grundvöll að því að börnin verði sjálfstæðir, virkir, hugsandi og ábyrgir einstaklingar í þjóðfélaginu. Ekki er um beina kennslu að ræða heldur haft að leiðarljósi að leikur barna er náms- og þroskaleið þeirra. Hjá börnum á leikskólaaldri er leikur ríkjandi athöfn og leikurinn á að vera hornsteinn leikskólastarfsins, lífstjáning og gleðigjafi barns (Menntamálaráðuneytið, 1999).

Námssvið aðalnámskrár (1999) eru sex: hreyfing, málrækt, myndsköpun, tónlist, náttúra og umhverfi, menning og samfélag. Þó að þarna sé ekkert námssvið sérstaklega um stærðfræði eru innan þeirra áherslur sem tengja má beint við stærðfræðinám barna eins og eftirfarandi dæmi sýna:

- Í hreyfingu: áhersla á ýmis stöðuhugtök og að átta sig á rými, fjarlægðum og áttum.

- Í málrækt: hér er áherslan á hugtök og hugtakaskilning barna og lögð áhersla á orð eins og staður, stærð, tími, fjöldi, magn, þyngd, hæð, lengd og breidd. Einnig að börn séu hvött til að íhuga og færa rök fyrir máli sínu í gegnum samræður.
- Í tónlist: að barnið læri að skynja hæð, lengd og styrk hljóðs í leik með hljóðgjafa.
- Í náttúru og umhverfi: hugað að árstíðum og veðri.

Að auki er minnst á ýmis verkefni sem tengjast stærðfræði eins og nota tölur, fylgjast með hvernig hitamælir stígur og hnígur, greina mynstur í tónlist, kynnast klukkunni, tímaröðun starfsþátta og dagatalinu (Menntamálaráðuneytið, 1999).

Óhætt er að fullyrða að í drögum að nýju útgáfunni af aðalnámskrá leikskóla (2010) sem taka á gildi haust 2011 sé vægi stærðfræði meira en í núgildandi námskrá. Náms sviðunum hefur fækkað og eru nú fjögur: tjáning og samskipti, hreyfing og vellíðan, umhverfi og vísindi og menning og listir. Eins og í fyrri námskránni er lögð rík áhersla á leik barna og það að leikurinn sé þungamiðja leikskólastarfsins enda er hann meginnámsleið barnanna. Stærðfræði er aðallega að finna undir náms sviðinu umhverfi og vísindi. Þar segir meðal annars að börn reyni frá unga aldri að skilja og kanna umhverfi sitt og noti til þess margvíslegar aðferðir eins og að hlusta, bragða, flokka, handfjatla, bera saman og draga ályktanir. Það er talið mikilvægt að starfsfólk leikskóla styðji við nám barnanna með því að átta sig á hvernig börn skilja hlutina og skapi þannig aðstæður að börn öðlist ríkuleg tækifæri til að skoða, rannsaka og prófa sig áfram. Innan þessa námssviðs er lögð áhersla á að börn fái m.a. tækifæri til að kynnast, skoða, rannsaka og velta vöngum yfir:

- Táknum og mynstrum í umhverfinu.
- Stærðfræðilegum hugtökum.
- Tölum og merkingu þeirra.
- Rými, fjarlægðum og áttum.
- Samhengi orsaka og afleiðinga.

➤ Mismunandi lausnum.

Í námssviðinu tjáning og samskipti eru einnig tilgreindir þættir sem eru mikilvægir varðandi stærðfræðiproska ungra barna. Þar er lögð áhersla á að barnið fái tækifæri til að nota tungumálið á fjölbreyttan hátt og tjái sig við mismunandi aðstæður. Litið er á börn sem félagsverur sem hafi þörf fyrir að deila hugmyndum sínum og spurningum. Það þarf að veita börnum svigrúm til að endurskapa upplifun sína og reynslu í leik og skapandi starfi og til að leita mismunandi lausna (Menntamálaráðuneytið, 2010a).

Það er jákvætt að vægi stærðfræði skuli vera gert sýnilegra og áþreifanlegra í þessum nýju drögum þar sem námskráin endurspeglar uppeldis- og menntahlutverk leikskólans. Námskráin á að vísa veginn hvað varðar stefnu og hugmyndafræði leikskólastarfs og eins og fjölmargar rannsóknir hafa sýnt fram á eru börn á leikskólaaldri að vinna mikið með stærðfræði í leik sínum. Námskráin felur í sér ákveðna sýn á leikskólastarf og grundvallargildi leikskólastarfsins og því mikilvægt að vægi stærðfræðinnar sé komið á blað.

2.4 Aðalnámskrá grunnskóla – stærðfræðihluti

Í aðalnámskrá leikskóla er talað um mikilvægi þess að samstarf ríki á milli leikskóla og grunnskóla. Slíkt samstarf er talið til þess fallið að stuðla að samfelli í uppeldi og menntun barnsins og til þess að svo megi verða þurfa leikskólakennarar og grunnskólakennarar að þekkja vel til hugmynda og vinnubragða hver annars. Með samvinnu er hægt að skiptast á skoðunum um uppeldi barna, nám og kennslu og þær kröfur sem gera má til barna á ákveðnum þroskaskeiðum. Í drögum að aðalnámskrá grunnskóla (2010b) almennum hluta er lögð áhersla á að mynda samfellda heild á þann hátt að fyrri reynsla og nám barnanna nýtist þeim á næsta skólastigi. Námið í grunnskólanum á að byggja á þeirri færni sem börnin öðluðust í leikskóla (Menntamálaráðuneytið, 2010b).

En þá ber að líta á stærðfræðihlutann fyrir yngsta stig samkvæmt aðalnámskrá grunnskóla (2007). Í markmiðum yngsta stigs er gengið út frá því að stærðfræðiáhugi barna á forskólaaldri sé til staðar og að börn sem eru að hefja nám í grunnskóla, búi yfir ákveðinni færni hvað varðar

stærðfræði, eða eins og segir í aðalnámskránni; börn í leikskólum hafa flest gaman af því að flokka og raða hlutum eftir eiginleikum sínum. Þau hafa flest náð að tileinka sér einföldustu atriðin úr talnakerfinu, mörg geta talið yfir tug og sum hver talsvert hærra og einhver hafa jafnvel náð valdi á háum tölum þó svo skilningur fylgi ekki alltaf með. Kennsla á yngsta stigi byggist á reynslu barnanna þar sem mismunandi getustigum er mætt.

Í aðalnámskránni segir að nemendur fái þjálfun í margvíslegri talnavinnu, við að flokka og raða hlutum og í umræðum um verkefnin og að kennslan byggist á hlutbundinni vinnu til að styrkja myndun hugtaka. Að auki þurfa nemendur að fá svigrúm til að nota eigin aðferðir en með því að leyfa þeim að þróa sína eigin lausnleið er verið að leggja grunn að skilningi barna varðandi aðgerðir. Áhersla er lögð á að nemendur fái tækifæri til að glíma við þrautir á eigin spýtur og í samvinnu við aðra, en þar sem börn eru ólík þurfa þau að fá að fara eigin leið í lausnleit sinni í samráði við aðra. Börn læra að nota tungumál stærðfræðinnar með því að ræða við aðra um viðfangsefnið og hugsanlegar lausnleiðir. Mikilvægt er að veita börnum tækifæri til að skýra hugsun sína fyrir öðrum þar sem þau færa rök fyrir henni munnlega, skriflega, með áþreifanlegum hlutum eða skýringarmyndum.

Huga þarf að því að börnin njóti sín og geti tekið þátt í umræðum um verkefnin þar sem þjálfun tungumálsins er einn af mikilvægustu þáttunum þegar kemur að því að efla stærðfræðilega hugsun. Í aðalnámskránni segir að viðhorf ungra nemenda til stærðfræði sé yfirleitt jákvætt og mikilvægt sé að grunnskólinn viðhaldi því og styrki. Ein leið að því markmiði er að leggja áherslu á skemmtanagildi greinarinnar t.d. með fjölbreyttum kennsluháttum og mismunandi nálgun við lausn verkefna.

„Að flétta námið inn í leik er gagnleg kennsluáferð í stærðfræði” (Menntamálaráðuneytið, bls. 8, 2007).

2.5 Skólanámskrá

Samkvæmt lögum er aðalnámskrá leikskóla hugmyndafræðilegur grundvöllur og stefnumótandi leiðarvísir að uppeldisstarfi fyrir leikskólana. Með þann grunn ber síðan sérhverjum leikskóla að semja

sína eigin skólanámskrá til lengri eða skemmri tíma. Aðalnámskráin er höfð sveigjanleg til að gefa leikskólum svigrúm til að móta sína eigin sérstöðu í samræmi við opinbera uppeldisstefnu leikskólans og þær áherslur sem leikskólinn hefur sett sér. Mikilvægt er að námskráin sé í nánum tengslum við áhugasvið barna, reynslu þeirra og daglegt líf og að hún taki mið af aldri, þroska og þörfum hvers barns.

„Skólanámskrá á að vera rökstuddur og raunhæfur leiðarvísir um hvernig, hvenær og hvar hinir fjölbreytilegu starfsþættir leikskólans eiga að fara fram“ (Menntamálaráðuneytið, bls. 35, 1999).

Það er því óhætt að segja að kennara bíði vandasamt verk að setja saman skólanámskrá þar sem tekið er tillit til allra ofangreindra þátta en jafnframt gefst gott svigrúm til að leggja áherslu á þá þætti sem hverjum og einum leikskóla finnst mikilvægt að vinna með í gegnum leik.

Leikskólakennarar byggja námskrá sína á aðalnámskrá leikskóla þar sem lögð er áhersla á leik barna en þar sem ekkert námssvið er sérstaklega um stærðfræði má segja að aðalnámskráin styðji ekki við það að leikskólakennarar setji stærðfræði inn í námskránnu. Þó má e.t.v. álykta að ný námskrá geti einhverju breytt hvað þetta varðar þar sem vægi stærðfræði er sýnilegra þar. Rannsóknir hafa sýnt að börn í leikskóla eru áhugasöm þegar kemur að stærðfræði og hafa þróað með sér mikilvægan og öflugan skilning á stærðfræði. Megnið af þessum stærðfræðiskilningi sínum hafa þau þróað með sér í gegnum leik (Perry og Dockett, 2007). Þrátt fyrir þessa vitneskju vilja leikskólakennarar ekki færa námskrána úr grunnskólanum niður í leikskólann heldur standa vörð um hlutverk sitt og halda í gildi þess að börn fái nám við hæfi, þ.e. í gegnum leik, samskipti og þroskavænlegar starfsaðferðir. Árið 2006 tóku samtök stærðfræðikennara í Ástralíu (Australian Association of Mathematics teachers (AAMT) og félag leikskólakennara í Ástralíu (Early Childhood Australia – ECA) sig saman og settu niður sameiginleg markmið varðandi stærðfræði fyrir ung börn og þar var margt mikilvægt og gagnlegt kynnt (Perry, Dockett og Harley, 2007). Lögð var áhersla á að stærðfræði yrði talin jafn mikilvæg varðandi þroska ungra barna eins og málþroski og læsi. Með þessari námskrá var hvatt til viðeigandi aðgerða til að tryggja að öll ung börn hefðu aðgang að öflugum stærðfræðilegum hugmyndum og námi og stuðlað yrði að velgengni og

jákvæðni. Stærðfræðihugmyndirnar þyrftu að tengjast núverandi lífi barnanna og mynda mikilvæga undirstöðu fyrir seinni tíma stærðfræðinámi. Börn ættu að fá aðgang að hugmyndum sem tækju mið af þroska barna í umhverfinu, heima og í skólanum (The Australian Association of Mathematics teachers and Early Childhood Australia, 2006). Í kjölfarið var farið af stað með verkefni eins og „Count me in too“ (CMIT) og „Early Numeracy Research Program“ (ENRP) sem höfðu heilmikil áhrif á stærðfræðinámi ungra barna og rannsóknir á stærðfræðinámi ungra barna (Perry, Young-Loveridge, Dockett & Doig, 2008). Ung börn hafa áhuga og getu á sviði stærðfræðilegrar hugsunar og nám og geta þeirra er gjarnan meiri en flestar námskrár gefa til kynna. Það er því einstakt tækifæri fyrir leikskólakennara að styðja við þessa hugsun barnanna en einnig veruleg áskorun (Sarama og Clements, 2009).

2.6 Kennarinn

Kennarar gegna mikilvægu hlutverki í stærðfræðinámi ungra barna. Þeir þurfa að þekkja hvernig stærðfræðihugsun ungra barna þróast og vera meðvitaðir um hvar þau eru stödd í þroska til að geta veitt þeim verkefni við hæfi. Leikskólastarf er ríkt af möguleikum til að fást við stærðfræði og kennarar þurfa að hafa þekkingu til að geta veitt börnunum tækifæri og svigrúm til að fást við örvandi verkefni (Baroody, 2004b). Dewey leggur áherslu á að kennarar taki mið af fyrri reynslu barna. Hann segir að byggja eigi á þeirri reynslu sem barnið hefur öðlast og sú reynsla verði síðan notuð til að fást við ný verkefni (Jóhanna Einarsdóttir, 2010).

Samtök stærðfræðikennara í Bandaríkjunum (National Council of Teachers of Mathematics, NCTM) settu fram viðmið fyrir aldurstengda stærðfræðistaðla árið 2000. Þessi viðmið undirstrika mikilvægi stærðfræði fyrir ung börn og að allir nemendur nái sem mestri stærðfræðilegri hæfni. Til að svo geti orðið skiptir máli hvernig kennslan fer fram og NCTM setti því fram eftirfarandi þrjár spurningar sem kennarar ættu að hafa til hliðsjónar varðandi ákjósanlega kennsluhætti:

- Hvað geta börn lært á ákveðnum aldri?
- Hvernig eru börn studd áfram í námi?
- Hvernig getur mat á fyrri þekkingu barnsins stutt kennarann við að skapa aðstæður til stærðfræðináms?

Það er í grundvallaratriðum samtengt hvað börn læra, hvernig þau læra það og hvernig nám þeirra er metið (Fuson, 2004).

Sérfræðingar á sviði stærðfræðikennslu segja að góð stærðfræðikennsla hafi hvetjandi áhrif á alla nemendur þannig að þeir verði virkir þátttakendur. Áhrifarík stærðfræðikennsla stuðlar að því að nemendur þrói með sér jákvæða mynd af stærðfræði í stað neikvæðrar. Flestum kennurum finnst þetta vera eitt mikilvægasta markmiðið en lenda síðan í vandræðum þegar kemur að kennslunni sjálfri (Sloane, 2007). Hlutverk kennara er yfirgripsmikið sérstaklega þegar verið er að tala um ung börn og stærðfræðináám. Lindquist og Joyner (2004) segja að stærðfræðiþroski leikskólabarna njóti sífellt meiri athygli. En væntingar okkar til barnanna eru gjarnan óraunhæfar, við höfum annað hvort of miklar eða of litlar væntingar til þeirra. Stærðfræði er óviða nefnd í námskrám leikskóla og því hafa leikskólakennarar oft litla eða enga þekkingu á viðeigandi stærðfræðimarkmiðum fyrir ung börn. Þeir sem vinna með börnum þurfa leiðsögn til að vita hverju á að fylgjast með og hvernig hægt er að hvetja ung börn til að þróa stærðfræðihugmyndir sínar (Lindquist og Joyner, 2004). Lykillinn að árangri er að setja niður grundvallarmarkmið og fylgja þeim leiðum sem rannsóknir á námi og þroska barna hafa sýnt fram á að virka (Perry, Dockett og Harley, 2007).

En hvað þurfa kennarar að vita til að geta sett fram einstaklingsmiðuð markmið fyrir börnin? Einfalda svarið við þessari spurningu er að þeir þurfa að skilja vel mikilvægi stærðfræðihugmynda, þekkja hvernig nemendur þeirra hugsa um stærðfræði og hvernig flest börn á sama eða svipuðum aldri eru líkleg til að leysa stærðfræðiþrautir. Carpenter o.fl. (1999) sýndu í rannsóknum sínum fram á að kennarar, sem höfðu aðgang að upplýsingum um það hvernig börn eru líkleg til að leysa stærðfræðiþrautir sem snúa að samlagningu og frádrætti, eru líklegri til að velja og búa til margskonar þrautir fyrir börnin og horfa frekar á þá aðferð sem börnin nota heldur en kennarar sem ekki höfðu slíkar upplýsingar (Hiebert, Carpenter, Fennema, Fuson, Wearne, Murray o.fl., 1997).

Mikilvægt er að kennarar geri sér grein fyrir því hvað hæfir hverju þroskastigi. Leikskólabörn verða að fá örvandi og áhugaverð stærðfræðiverkefni og nota þarf augljósan áhuga þeirra sem upphafspunkt til að vinna út frá. Eins og áður hefur verið bent á læra börn í gegnum leik með öðrum börnum og kennarar eiga því ekki að takmarka tíma barna

sem eru að leika sér í stærðfræðitengdum leikjum. Kennarar þurfa líka að veita börnum viðeigandi örvun og verkefni við hæfi til að tryggja að þau öðlist reynslu af stærðfræði. Þeir þurfa að leggja sig fram um að skapa umhverfi fyrir stærðfræðináám barna og til þess þurfa kennarar að hafa þekkingu á námi þeirra, læra nýjar kennsluáðferðir og þróa áætlun sem hæfir öllum börnum (Seo og Ginsburg 2004).

Douglas H. Clements er höfundur rannsóknar- og námskráarverkefnisins „Byggjum brýr“ (e. building blocks project) sem byggt er á kenningum og rannsóknum á því hvernig ung börn skilja stærðfræði og kennslu ungra barna. Rannsóknir sýna að börn fylgja ákveðinni þróun eða stigum þegar þau læra stærðfræði. Talað er um að börn séu á ákveðnu stigi þegar megnið af hugsun þeirra eða hegðun endurspeglar hugmyndir og færni sem tilheyrir því stigi. Börn sýna þó stundum hegðun sem tilheyrir stiginu fyrir ofan eða neðan. Stigin eru ekki alveg afmörkuð heldur frekar viðmið því börn eru stöðugt að læra og flytjast á milli stiga. Kennarar geta notað þessi stig sem viðmið til að átta sig á hvar barnið er statt og stigin er því grundvöllur fyrir námsferli (e. learning trajectories). Kennarinn tekur ákvörðun um hvernig verkefni hann velur fyrir barnið, verkefni sem hann telur að stuðli að vexti frá einu stigi til annars. Það er að segja verkefni sem barnið fær eru iðulega örlítið fyrir ofan það stig sem barnið er á og barnið þarf oftast að leysa verkefnið í samvinnu við kennara eða með öðrum getumeiri börnum. Námsferli eru gagnleg kennslufræði en þekking á þroskaframvindu barna er grundvöllur þess að hægt sé að beita því. Kennarinn þarf að vita hvar barnið er statt stærðfræðilega og hvert það getur náð. Þetta er ein mikilvægasta ástæða þess að við ættum að setja námsferli á oddinn (Sarama og Clements, 2009).

Wood og Frid (2005) gerðu rannsókn í Ástralíu um gildi samkennslu árganga í stærðfræði. Niðurstaðan var á þann veg að samkennsla ein og sér var ekki nægjanleg til árangurs heldur höfðu aðferðir kennara heilmikið að segja. Kennarinn varð að stuðla að hvetjandi samræðum milli barnanna og setja upp námskrá (Wood og Frid, 2005).

Cognitively Guided Instruction (CGI) eða stærðfræðikennsla byggð á skilningi barna (SKSB) eins og það hefur verið þýtt á íslensku byggir á rannsóknum á þróun stærðfræðikennslu kennara. Hugmyndafræðin að baki rannsóknunum byggir á því að skilja hvernig börn hugsa um stærðfræði. Undirstaða þessarar hugmyndafræði eru rannsóknir sem

gerðar voru við Wisconsin háskóla í Bandaríkjunum, á skilningi barna á tölum og reikniaðgerðum. Þar er lögð áhersla á að virða óformlega þekkingu og lausnaleiðir barna í stærðfræði og byggja síðan áframhaldið í kringum þá þekkingu. Hugmyndafræðin felst í því að ákvarðanir um hvað á að kenna og hvenær eru alltaf grundvallaðar á skilningi barna hverju sinni. Börn læra stærðfræði til skilnings með því að fást við þrautir. Kennslan byggir á vinnu með þrautir úr daglega lífinu og á því að kennarinn skilji hvað liggur að baki hverri aðgerð hjá barninu (Carpenter, Fennema, Franke, Levi, Empson, 1999). Flestir kennarar vilja að nemendur þeirra læri stærðfræði til skilnings og þeir kenni hana þannig að börnin skilji. Þrátt fyrir það hefur ekki alltaf verið ljóst hvað það þýðir að læra stærðfræði til skilnings og þaðan af síður hvernig eða hvort kennslustofan er hönnuð til að auðvelda skilning á stærðfræði. Skilningur er flókið ferli og er ekki eitthvað sem þú hefur eða hefur ekki. Skilningur er sífellt að breytast og vaxa og honum má í raun lýsa frá mörgum sjónarhornum (Hiebert, o.fl., 1997).

Hiebert o.fl. (1997) settu saman fimm atriði sem þau telja að veiti börnum stuðning við að skilja stærðfræði og skapi jafnframt gott námsumhverfi:

- Viðfangsefni við hæfi (e. the nature of classroom task).

Eðli verkefna á að vera í samræmi við stöðu nemandans og áhugasvið. Nemandinn getur notað þekkingu sína til að leysa verkefni og fær tækifæri til að læra eitthvað sem hefur gildi fyrir hann.

- Hlutverk kennarans (e. the role of the teacher).

Kennarinn velur viðfangsefni við hæfi allra og skapar umhverfi sem hvetur til náms. Hann er þátttakandi í vinnu nemandans og skiptist á skoðunum um verkefni. Kennarinn þarf að leyfa nemendum að uppgötva mikilvægar upplýsingar sem leiða til áframhaldandi skilnings því of mikil inngrip af hendi kennara geta hindrað frumkvæði og skapandi hugsun nemenda.

- Menning sem hvetur til náms (e. the social culture of classroom).

Hafa verður að leiðarljósi að hugmyndir allra nemenda séu metnar að verðleikum. Nemendur velji þær aðferðir sem þeir vilja nota og deila þeim með öðrum. Með því að deila hugmyndum sínum finna börnin sameiginlegar lausnir og geta lært að nota mistök sín á uppbyggilegan hátt.

- Hjálpargögn (e. mathematical tools as learning supports).

Mikilvægt er að líta á hjálpargögn sem stuðning við námið. Hjálpargögn geta verið af margvíslegum toga og börnin verða að fá að nota þau við ólík verkefni til að prófa sig áfram, kynnast þeim og sjá tilgang með þeim. Á þann hátt geta hjálpargögnin auðveldað þeim skilning á viðfangsefninu.

- Jafnrétti og aðgengi allra nemenda (e. equity and accessibility).

Allir nemendur eiga rétt á að skilja hvað þeir eru að fást við í stærðfræði, óháð bakgrunni sínum. Huga þarf að því að styðja við nemendur þar sem þeir eru staddir hverju sinni og að þeir fái að tjá sig um stærðfræðiviðfangsefnin. Með því að hlusta vel á nemandann er honum sýnd virðing og það gefur kennara og samnemendum tækifæri á að kynnast honum sem einstaklingi.

Hiebert og félagar töldu að hægt væri að yfirfæra þessi viðmið á allar kennslustofur eða námsaðstæður barna (Hiebert o.fl., 1997).

Rannsóknir hafa sýnt fram á að börn, sem læra að nota þrautalausnir í stærðfræði frá unga aldri öðlast betri skilning heldur en ef byrjað er seinna. Þrautalausnir, sem tengdar eru daglegu lífi barnanna, styrkja enn frekar stærðfræðiskilning og ef byrjað er á auðveldum þrautum geta börnin seinna meir yfirfært þær á flóknari þrautir. Hætta er á að börn, sem eiga í erfiðleikum í stærðfræði, læri að reikna tölurnar, sem koma fyrir í þrautinni, en skilji ekki um hvað hún er. Því er mikilvægt að styrkja skilning barnanna með því að leyfa þeim frá upphafi að leysa þrautir með teikningum eða öðrum stærðfræðigögnum. Börn þurfa að fá að velja sína eigin aðferð því það hentar ekki öllum það sama. Á þennan hátt byggja þau upp skilning sinn (Fuson, 2004).

Young-Loveridge (2004) gerði rannsókn á Nýja- Sjálandi þar sem hún kannaði árangur af áætlun um að auka færni fimm ára barna í

talnaskilningi með því að nota með þeim bækur og spil undir leiðsögn reynds kennara. Talnaskilningur barnanna, sem tóku þátt í verkefninu jókst verulega eða um tvö staðalfrávik. Fimmtán mánuðum eftir að verkefninu, lauk höfðu áhrifin minnkað um hálf staðalfrávik en forskot barnanna, sem tóku þátt í verkefninu, var enn tölfræðilega marktækt (Perry, Young-Loveridge, Dockett og Doig, 2008).

Dalvang og Lunde fjalla í grein sinni um rannsókn Clarke og Faragher sem sýnir að kennarar, sem kenna nemendum er eiga í erfiðleikum með nám, einblíni um of á erfiðleikana og hafi lágmarks væntingar um hvaða hæfni nemendur geta náð. Verkefni Clarke og Faragher (2004) fólst í því að vinna með kennurum barna í sérskóla. Lögð var áhersla á að kennarar notuðust við ólíkar kennsluaðferðir, líkt og gert er í almennum skólum, en þær væru aðlagðar að þörfum nemendanna sem áttu í erfiðleikum með stærðfræði. Niðurstöður voru þær að kennurum fannst þróast ríkulegt og hvetjandi umhverfi fyrir stærðfræðilega hugsun og lausn vandamála, sem kom fram í stærðfræðilegri hæfni nemenda og viðhorfum til efnisins. Kennararnir hefðu getað lagt áherslu á takmarkanir nemenda sinna en þess í stað fóru þeir að einbeita sér að möguleikum þeirra (Dalvang og Lunde, 2006). Kennarar þurfa að greina hvernig hver einstakur nemandi lærir til þess að geta skipulagt námsumhverfi fyrir nemendur með tilliti til ólíkra forsenda þeirra til náms (Jónína Vala Kristinsdóttir, 2004).

Í Noregi hafa skólayfirvöld haft áhyggjur af því að nemendur ná ekki viðunandi árangri í stærðfræði og ákváðu að setja sér ný viðmið. Þar í landi er skýr lagasetning varðandi menntun fyrir börn, unglinga og fullorðna með sérþarfir. Dalvang og Lunde (2006) segja að sérfræðihjálpsnúist oftast um greiningar, fötlun og vandamál nemenda í stað þess að beina sjónum að færni og námsmöguleikum þeirra. Með nýjum viðmiðum var ákveðið að beina sjónum að námsmöguleikum og færni nemenda. Námsmöguleikar eru nú túlkaðir í samræmi við svæði mögulegs þroska og er þar byggt á kenningum Vygotsky. Erfiðleikar í námi eru skoðaðir út frá því hvað nemandinn getur leyst ef hann fær stuðning, sem þýðir að skilyrði nemandans til náms er hægt að þróa og þessi þróun veltur bæði á umhverfi nemandans og getu. Stærðfræðileg færni þýðir að nemandinn fær tækifæri, hann er þátttakandi, vinnur að verkefnum á mismunandi hátt og finnur að hann skiptir máli (Dalvang og Lunde, 2006).

Í rannsókninni Project Good Start (Tomson, Rowe, Underwood og Peck, 2005) var rannsakaður árangur af áætlun varðandi talnaskilning (e. numeracy programs) í Ástralíu. Börnin í rannsókninni komu bæði rannsakendum og kennurum sínum stöðugt á óvart með þekkingu sinni og hæfni á sviði stærðfræði. Niðurstöður rannsóknarinnar sýndu að þar sem árangursrík kennsla var til staðar störfuðu kennarar sem:

- Höfðu áhuga á talnaskilningi og höfðu væntingar til barnanna.
- Voru með skýr markmið varðandi talnavinnu.
- Höfðu áhuga á stærðfræði og sáu börnunum fyrir námsefni sem stuðlaði að talnaskilningi.
- Voru meðvitaðir um þróun stærðfræðiskilnings ungra barna.
- Höfðu hæfileika til að hvetja börnin til að fást við stærðfræði og styðja þau við námið.
- Mátu reglulega getu og framfarir barnanna og útveguðu þeim verkefni við hæfi (Thomson, Rowe, Underwood og Peck, 2005).

Mikilvægasta hlutverk kennarans við upphaf grunnskólagöngu barna ætti að vera að koma auga á þá styrkleika sem hver og einn nemandi hefur með sér (Perry, Young-Loveridge, Dockett & Doig, 2008).

Dewey lagði áherslu á að kennarar áttuðu sig á hæfileikum og áhuga barnanna til að geta skipulagt skólastarfið. Kennarinn þarf að vera meðvitaður um þá möguleika sem leiða barnið inn á ný svið. Dewey sagði að fagmennska kennarans skipti miklu máli og hann ætti að hafa þekkingu til að meta hvernig umhverfi og reynsla stuðlar að menntun og þroska barnsins. Kennarinn þarf að stýra reynslu barnsins án þess að beita þvingunum. Reynsla mótast af umhverfi og samskiptum og kennarinn þarf að átta sig á í hvaða átt reynslan stefnir til þess að geta leitt barnið inn á ný svið sem byggja á þeirri reynslu sem barnið hefur þegar öðlast. Að auki er mikilvægt að skapa viðeigandi skilyrði sem hafa áhrif á reynslu barnanna hér og nú. Dewey sagði ábyrgð kennarans vera í því fölgna að leggja fram viðfangsefni við hæfi, þekkja áhuga og athafnir barnsins og vera hvetjandi. Hann lagði jafnframt áherslu á samvinnu

kennara og þáttöku barnanna í mótun námsins (Jóhanna Einarsdóttir, 2010).

Afstaða kennara til kenninga hefur áhrif á það hvernig þeir kenna og hvernig þeir líta á nemendur sína. Bruner (1996) segir að það séu fjögur ríkjandi líkön um hugsun eða nám nemandans sem gefi til kynna ólík menntunarmarkmið og hafi bein áhrif á hvernig kennslan fer fram:

- Litið er á barnið sem hermi (e. seeing children as imitative learners). Þarna er það hinn fullorðni sem setur niður markmiðin og sýnir barni hvernig á að framkvæma þau.
- Litið er á barnið sem þekkingarþegn (e. seeing children as learning from didactic exposure). Þarna er nemandinn sá sem tekur við þekkingunni frá kennaranum. Kennslan fer ekki fram í gegnum umræður.
- Litið er á barnið sem hugsuð (e. seeing children as thinkers). Þarna er barnið virkur aðili í þekkingarleit sinni. Áhersla er lögð á að barnið öðlist skilning í gegnum umræðu og samvinnu þar sem barnið er hvatt til að koma með eigin skoðanir.
- Litið er á barnið sem þann sem er vel að sér (e. children as knowledgeable). Þarna eru tekin með áhrif menningarinnar í menntuninni. Öll þekking á sér sögu eða bakgrunn og hana ber að nýta til að skapa nýja þekkingu (Bruner, 1996).

2.7 Heildarsamantekt

Kennismiðirnir Piaget, Dewey, Vygotsky og Bruner leggja allir áherslu á að aðlaga kennslu og námsumhverfi að stöðu barnsins hverju sinni. Með þetta að leiðarljósi þurfa kennarar að kynnast barninu vel, getu þess og hæfileikum, til að þeir verði færir um að leggja fram stærðfræðileg viðfangsefni sem hæfa aldri og þroska barnsins hverju sinni.

Leikurinn skipar einnig stóran sess í kenningum þeirra þar sem lögð er áhersla á að leikurinn sé námsleið barnsins og að barnið skapi sér þekkingu með reynslu, með því að handfjatla hluti og prófa sig áfram í gegnum leik en ekki með beinni kennslu. Því hefur umhverfi barnsins mikið að segja og það er hlutverk kennarans að skapa ögrandi og þroskavænlegt leikumhverfi segja þeir enn fremur.

Aðalnámskrá leikskóla styður vel við þessa hugmyndafræði þar sem leikurinn er talinn hornsteinn leikskólastarfs og mikilvægasta námsleið barnsins. Það er einnig jákvætt að vægi stærðfræði skuli vera gert sýnilegra og áþreifanlegra í nýjum drögum að aðalnámskrá leikskóla (2010), þar sem námskráin endurspeglar uppeldis- og menntahlutverk leikskólans. Námskráin á að vísa veginn hvað varðar stefnu og hugmyndafræði leikskólastarfs og eins og fjölmargar rannsóknir hafa sýnt fram á eru börn á leikskólaaldri að vinna mikið með stærðfræði í leik sínum. Námskráin felur í sér ákveðna sýn á leikskólastarf og grundvallargildi leikskólastarfsins og því mikilvægt að vægi stærðfræðinnar sé komið á blað.

Kennismiðirnir eru einnig sammála um að byggja þurfi ofan á þá þekkingu sem er til staðar því þannig byggi barnið upp skilning sinn og nota eigi áhuga barnsins sem útgangspunkt.

Að ofansögðu er ljóst að hlutverk kennarans er mikilvægt varðandi stærðfræðinám ungra barna. Þeir þurfa að þekkja vel hvernig stærðfræðihugmyndir ungra barna þróast svo þeir geti útbúið námskrá og lagt fram verkefni við hæfi. Þeir þurfa að vera faglegir og byggja á rannsóknum á námi og kennslu ungra barna. Mikilvægt er að skapa viðunandi umhverfi með efnivið og samræðum sem hvetja til áframhaldandi skilnings og taka mið af ólíkum forsendum barna til náms. Jafnframt þurfa kennarar að byggja stærðfræðireynslu ungra barna á leik.

Með kenningar þessara manna að leiðarljósi ætti stærðfræðinám ungra barna að eiga sér stað í gegnum leik þar sem þau hafa aðgang að þroskavænlegu umhverfi sem styður við þau í þróun sinni þannig að þau geti byggt ofan á fyrri þekkingu sína.

3 Skilningur ungra barna á stærðfræði

Í þessum kafla er fjallað um rannsóknir á stærðfræðinámi ungra barna og sjónum aðallega beint að leikskólaaldrinum. Skoðað er hvað rannsóknir segja um nám og þróun stærðfræðiskilnings ungra barna, hvaða stærðfræði börn á þessum aldri fást við í leik og hvernig þau leysa stærðfræðileg viðfangsefni. Að auki er rætt um skilgreiningar á erfiðleikum við stærðfræðinámi.

Samkvæmt alþjóðlegri samþykkt Efnahags- og framfarastofnunarinnar (OECD) frá árinu 2001 þá er almennt átt við tímabilið frá fæðingu til átta ára aldurs þegar talað er um ung börn (e. early childhood) (OECD, 2001). Þetta er tímabil örra breytinga hjá börnum þar sem þau læra mikið um sig sjálf, annað fólk og heiminn sem þau búa í. Perry og Dockett vísa í grein sinni til rannsókna Shonkoff & Phillips (2000) sem segja að fyrstu fimm ár lífsins þroskist einstaklingar mun hraðar en nokkurn tíma síðar á ævinni. Þessi vitneskja hefur leitt til þess að bernskan er talin einn mikilvægasti tíminn fyrir fræðslu og íhlutun. Önnur rök sem styðja þetta sjónarmið er aukin vitneskja um vöxt heilans á þessum fyrstu árum lífsins. Það er mikilvægt að gera sér grein fyrir mikilvægi þekkingaröflunar á fyrstu árum lífsins. En það er ekki síður mikilvægt að muna að mikið af þessari þekkingaröflun á sér stað við náttúrulegar aðstæður, eins og í samskiptum og í gegnum leik (Perry og Dockett, 2008). Lengi vel var talið að börn fæddust sem óskrifað blað (e. tabula rasa) en með nýjum aðferðum hafa sálfræðingar safnað miklum upplýsingum um þá hæfileika sem börn búa yfir, sem stendur í áþreifanlegri mótsögn við fyrri vitneskju þegar gjarnan var litið til þess hvað ung börn væru ekki fær um eða hvað þau skorti. Nú er farið að líta á börn sem virka og hæfa einstaklinga sem eru færir um að setja sér markmið, skipuleggja og endurskoða (Bransford, Brown og Cocking, 2000).

Á síðustu öld hafa skoðanir manna, á því hvaða stærðfræði ung börn fást við, breyst mikið og segja má að á síðustu árum hafi athyglin í auknum mæli beinst að stærðfræðinámi ungra barna. (Sarama og Clements, 2009). Ginsburg, Inoue og Seo (1999) segja að leikskólakennarar verði að þekkja og skilja stærðfræðilegan skilning og áhuga barnanna til að vita hverskonar stærðfræði hentar þroskastigi þeirra. Til þess að svo megi verða þarf að rannsaka daglegar athafnir

barnanna því þær rannsóknir veita mikilvægar upplýsingar um hverskonar stærðfræði er viðeigandi fyrir ung börn (Seo og Ginsburg, 2004). Á síðustu þremur áratugum hafa talsvert margar rannsóknir verið gerðar á stærðfræðinámi ungra barna og á því hvernig skilningur þeirra á viðfangsefninu þróast (Jónína Vala Kristinsdóttir, 2004). Rannsóknir benda til þess að undirstöðuþekking á stærðfræði hefjist strax við fæðingu og stærðfræðiskilningur barna þróist hratt fyrstu fimm ár ævinnar. Það er alveg jafn eðlilegt fyrir ung börn að hugsa um stærðfræði eins og það er fyrir þau að nota tungumálið því börn fæðast með næmi fyrir fjölda, skilning fyrir rými og tilhneigingu til að leita eftir mynstrum. Rannsóknir hafa leitt í ljós að ung börn hafa yfirgrípsmeiri þekkingu á stærðfræði en áður var haldið og að þau hafa hæfileika og kunnáttu þegar kemur að stærðfræði. Hugmyndir barna og túlkanir þeirra á aðstæðum eru frábrugðnar hugsunum fullorðna. Kennarar yngri barna þurfa að gæta sérstaklega að því að gera ekki ráð fyrir að ung börn sjái aðstæður, vandamál eða lausnir á sama hátt og fullorðnir. Því þurfa kennarar alltaf að túlka hvað barnið er að gera og hugsa og reyna að skilja aðstæður út frá sjónarhorni barnsins (Sarama og Clements, 2009). Nýjar rannsóknir sýna að leikskólabörn hafa yfir að búa stærðfræðilegum styrkleikum á ýmsum sviðum og að ung börn, þrátt fyrir ákveðnar takmarkanir, skilji mun meira um tölur og talnafræði heldur en áður var haldið (Baroody 2004).

3.1 Stærðfræði í leik

Ginsburg, Inoue og Seo gerðu rannsókn árið 1999 á níttíu börnum á aldrinum fjögurra og fimm ára. Þau rannsökuðu börn í frjálsum leik til að sjá hversu oft stærðfræði kæmi við sögu í leik þeirra og líka hverskonar stærðfræði kæmi þar fram. Rannsakendur notuðust við myndbandsupptökur af börnunum og tóku 15 mínútna upptöku af hverju barni til að fá svör við spurningum sínum. Þegar börn eru í frjálsum leik virðast þau ekki vera að leika sér með stærðfræði en niðurstöður rannsóknar Ginsburg og félaga sýndi fram á annað. Þar kom fram að 79 af þeim 90 börnum sem rannsóknin náði yfir notuðu a.m.k. einu sinni stærðfræðitengda athöfn í leik sínum eða 88% barnanna. Einnig kom í ljós að börnin voru að meðaltali í sjö mínútur af þessum fimmtán mínútum í stærðfræðitengdum leikjum.

Rannsakendur skiptu stærðfræðiathöfnum barnanna niður í nokkra flokka og skráðu hversu oft börnin notuðust við ákveðna tegund stærðfræði til að fá enn betri mynd af stærðfræðileikjum barnanna. Niðurstöður voru eftirfarandi:

- 21% tilfella - börnin leika sér með mynstur og lögun (e. pattern and shape). Hér eru börnin að búa til mynstur eða form eða kanna rúmfræðilega eiginleika.
- 13% tilfella – börnin nota hugtök yfir stærð/magn (e. magnitude) í leik sínum. Hér nota börnin setningar eins og: „Þetta er ekki nógu stórt“ eða „minn er stærri“.
- 12% tilfella - um upptalningu (e. enumeration) er að ræða. Hér eru börnin að telja hluti, giska á fjölda án þess að telja, lesa eða skrifa tölustafi.
- 5% tilfella - leikurinn er hreyfifræðilegur (e. dynamics) eins og t.d. að setja saman hluti, taka þá í sundur, móta leir eða skipta á milli sín.
- 4% tilfella - um rúmfræðilega frásögn (e. spatial relations) eins og t.d. gefa leiðbeiningar um staðsetningu.
- 2% tilfella – börnin eru að flokka (e. classification). Hér eru börnin að flokka hluti (t.d. lítil plastdýr) eftir tegundum eða litum.

Í rannsókninni kom fram að bakgrunnur barnanna eða kyn virtist ekki skipta máli en hins vegar hafði aldur barnanna áhrif þegar skoðað var í hverskonar leikjum þau voru. Eldri börnin léku sér oftar í stærðfræðitengdum leikjum og leikir þeirra tengdust oftar tölum, mynstrum og formum en leikur yngri barnanna. Niðurstöður rannsóknarinnar sýndu fram á að börn á leikskólaaldri leika sér mikið í stærðfræðitengdum leikjum í frjálsum leik og að stærðfræði barnanna er mun þróaðri en áður var talið (Seo og Ginsburg, 2004).

3.2 Talnaskilningur ungra barna

Þekking á magni þróast snemma í lífinu og vex umtalsvert á fyrstu þremur árum barnsins. Þó erfitt sé að rannsaka talnaskilning ungra barna hefur verið sýnt fram á í rannsóknum að sex mánaða gömul börn gera greinarmun á tveimur og þremur hlutum. Ef börnunum eru ítrekað sýndar myndir með þremur hlutum missa þau áhugann en ef þau sjá í kjölfarið t.d. mynd af tveimur hlutum verða þau áhugasöm á ný og er þetta talið sýna að þau greina þarna á milli. Talið er að börn geti við 18 mánaða aldur greint á milli tveggja lítilla mengja sjónrænt. Þetta gefur til kynna að þau skynji fjölda en það þýðir þó ekki að þau hafi öðlast talnaskilning (Clements, 2004a). Hæfileiki ungra barna til að þekkja og greina fáa hluti eða lítinn fjölda af nákvæmni bendir til þess að börnin öðlist skilning á fjölda áður en þau hafa þekkingu til að telja (Baroody, 2004a). Smábörn læra yfirleitt að segja fyrstu töluna í kringum 24 mánaða aldur og það er oftast talan „tveir“ (Clements, 2004a).

Ein af allra fyrstu rannsóknum á talnaskilningi barna, sem vitað er um, var gerð árið 1891 af Hall. Hann skoðaði börn sem voru að hefja grunnskólagöngu sína í Berlín og komst að þeirri niðurstöðu að allt að 74% barnanna könnuðust við tölurnar tvo, þrjá eða fjóra. Hæfni leikskólabarna til að telja er mismunandi samkvæmt rannsókn Aubrey (1997) en þar kom fram að geta barna í talningu var frá því að sum gátu talið upp í fjóra á meðan önnur töldu upp í eitt hundrað, en 80% barnanna gátu talið a.m.k. upp í tíu og 15% barnanna gátu talið á bilinu 21 - 30.

Ef rannsóknir eru skoðaðar þá virðist raunin vera sú að börn séu að öðlast meiri stærðfræðiskilning sífellt yngri að árum (Sarama og Clements, 2009).

Aldurinn þriggja til fjögurra ára er hægt að kalla tíma talningar (e. world of counting numbers). Strax við fjögurra til fimm ára aldur hafa flest börn öðlast töluverða færni á þessu sviði og geta talið frá 1 upp í 5 eða frá 1 upp í 10. Þau vita jafnframt að þau verða að geta tengt töluna sem nefnd er við einn af þeim hlutum sem verið er að telja, þ.e. hver hlutur er aðeins talinn einu sinni og að síðasta talan sem nefnd er segir til um fjöldann. Sum geta jafnvel talið afturábak frá fimm (Griffin, 2004). Börn á þessum aldri eru orðin fær um að bera saman magn og nota viðeigandi orð eins og „minna“ og „meira“ (Clements, 2004a). Til að geta talið ákveðinn fjölda hluta koma börn sér upp skipulagi á talningunni með því að nota hreyfingu, eins og að benda á hvern hlut, taka hann til sín eða

hreyfa hann. Um 5 ára aldur geta flest börn einnig komið auga á villu í talningu hjá öðrum börnum og geta leiðrétt sig þegar þau hafa talið vitlaust (Sarama og Clements, 2009). Á þessum aldri geta flest þeirra talið um 20 til 30 hluti þó nákvæmni þeirra taki mið af einbeitingu hvers og eins. Fjöldi hluta getur líka haft áhrif á hvort þau gera villu og þá hvers konar villu, eins og t.d. þegar börn taka einn hlut í einu og telja en fara svo að búa til mynstur með hlutunum, raða þeim upp á ákveðinn hátt eða þá að færa fleiri en einn hlut með hverri talningu og ruglast þar af leiðandi í talningunni (Baroody, 2005b).

Tölur hafa fjórar merkingar: þær segja til um fjölda, um magn (til dæmis lengd eða þyngd), um röð og svo eru tölur stundum notaðar í stað nafns eins og „leikmaður nr. 5 er klár“. Börn læra fyrst fjöldatölur en til að geta sagt til um fjölda þarf barn að geta talið rétt, geta talið hvern hlut í hóp og vita hvað er búið að telja og hvað ekki. Skilningur á fjöldatölum gerir börnum kleift að búa til hóp með ákveðnum fjölda, einnig að bera saman fjölda og þekkja jafnstóra hópa t.d. að hópur með þremur kössum hefur sama fjölda og hópur með þremur boltum, þó að þeir innihaldi ólíka hluti. Sama gildir um formlega og óformlega ritun á tölum eða fjölda, eins og hægt er að skrifa þrjú strík /// eða skrifa tölustafinn 3. Skilningur á fjöldatölum þroskast snemma og eins og fyrr segir geta börn gert sér grein fyrir fjölda í litlum hóp mjög ung. Börn á aldrinum tveggja til fjögurra ára geta sagt til um hópa sem eru með 1 til 4 hlutum í áður en þau ráða við að telja með öruggum hætti. Við þriggja og hálfis til fjögurra ára aldur geta börnin talið með orðum og telja hluti sem gefur þeim aukið tækifæri til að nota tölur. Á þessu aldurskeiði eykst skilningur barna á fjöldatölum og sá skilningur er fyrsta skrefið í átt að talnaskilningi. Eitt af því sem eykur skilning barna á fjöldatölum er þegar þau uppgötva að þó hlutum sé raðað misjafnlega upp þá breytist ekki fjöldinn og að síðasta talan í talningunni segir til um fjöldann. Skilningur eykst að sama skapi þegar þau uppgötva að ekki skipti máli í hvaða röð talið er, fjöldinn er alltaf sá sami. Að lokum eykst skilningurinn enn fremur þegar börnin uppgötva hvernig hægt er að nota tölur til að bera saman stærðir (Baroody, 2004a). Svo hægt sé að tala um að börn kunni fullkomlega að telja þurfa þau að vita að hver tala á við einn hlut, að talnaröðin er alltaf sú sama og að síðasta talan gefur til kynna heildarfjöldann, sama hvað talið er og sama í hvaða röð talið er (Clements, 2004a).

Baroody (2004) hefur sett fram eftirfarandi sex grundvallarþætti sem börn þurfa að ná tökum á til að öðlast skilning á þeirri stærðfræði sem kennd er í grunnskóla:

- Nota tölur til að segja til um fjölda í hópi.
- Nota tölur til að bera saman fjölda í hópum.
- Leggja saman og draga frá tölur frá 1 til 9.
- Skilja samband milli hluta og heildar.
- Skipta jafnt á milli (deiling) eða setja saman í hópa (margföldun).
- Hópa saman í tugi, hundruð o.s.frv. Börn þurfa að skilja hvernig tölur eru settar saman með tilliti til tugakerfisins eins og að talan 324 þýðir; 3 eru hundruð, 2 eru tugir og 4 eru einingar (Baroody, 2004a).

3.3 Að telja í runu

Börn geta oftast talið hærra þegar þau telja í runu heldur en þegar þau telja hluti en þau þurfa að læra það mynstur eða endurtekningu sem er gildandi í móðurmáli þeirra, a.m.k. varðandi tölur sem eru hærrí en tuttugu. Það sem styður þetta eru rannsóknir sem sýnt hafa fram á að þau börn, sem gátu haldið áfram talningunni eftir að hafa fengið vísbendingu um næstu tölu (oftast tug), stóðu sig betur í öllum verkefnum um tölur. Það gefur vísbendingu um að það að hafa fullt vald á munnlegri talningu hefur ekki eingöngu með endurtekninguna að gera heldur það að geta borið kennsl á regluna að baki talningunni (Sarama og Clements, 2009).

Callahan og Clements (1984) rannsökuðu 4.722 börn sem voru að hefja nám í fyrsta bekk á árunum 1976 til 1980 og þar kom í ljós að tiltölulega hátt hlutfall barna hættu í munnlegri talningu á bilinu 10 til 19, 20 til 29 eða 30 til 39 en þau sem gátu talið fram yfir 50 héldu flest áfram talningunni þar til þau voru komin upp í 100 (Sarama og Clements, 2009).

Það að læra að telja tekur líka mið af tungumálinu sem viðkomandi talar, það hefur að gera með það hversu skýrt mynstrið í talningunni er og hversu auðvelt er fyrir börnin að tileinka sér það. Kínversk börn læra fyrr

að telja hærra en t.d. börn frá Bandaríkjunum. Fjögurra ára gömul kínversk börn geta flest talið upp í 40 á meðan jafnaldrar þeirra í Ameríku geta rétt komist upp í 15 og það tekur þau ár til viðbótar að komast upp í töluna 40. Bæði í kínversku og ensku eru tölurnar frá 1 til 10 valdar af handahófi, það er að segja það er ekki hægt að segja fyrir um röðunina með neinni ákveðinni reglu. Í ensku heldur þetta áfram þ.e. næst á eftir tíu kemur ellefu, tólf, þrettán tuttugu, en í kínversku er talnaruna á eftir tölunni tíu einfaldlega tíu einn (11), tíu tveir (12), tíu þrír (13) og tuttugu er tveir tíu, 22 er tveir tíu tveir o.s.frv. rökrétt kerfi heldur áfram. Í kínversku eru einungis notuð 11 orð til að telja frá 1 upp í 100 á meðan enskumælandi einstaklingar þurfa að nota 28 orð (Sousa, 2008).

3.4 Að skrifa tölustafi

Börn læra fyrst að telja hluti, síðan öðlast þau skilning á skrifuðum tölum og að nota tölur til að segja til um fjölda. Sú breyting á sér stað á aldursbilinu þriggja til sex ára allt eftir því hvaða örvun börnin fá heima fyrir og í skóla. Samkvæmt Sinclair & Sinclair (1986) tengjast tveir mikilvægir þættir skilningi barna á tölutákninu. Í fyrsta lagi þarf barnið að þekkja formið og hvernig það er samansett, en það hjálpar barninu að greina eina tölu frá annarri og að geta lesið táknin. Í öðru lagi er þekking barnsins á mismunandi notkun táknsins og því hvenær tölur eru notaðar. Huges (1986) segir að börn geti haft persónulega hugmynd um leiðir til að tákna fjölda áður en þau geta notað formleg stærðfræðileg tákn. Börn á aldrinum þriggja til fjögurra ára búa gjarnan til sín eigin tákn til að segja til um fjölda þó stundum skilji enginn nema barnið hvað táknið merkir (Baroody, 2004b).

Við fjögurra ára aldur þekkja flest börn tákn fyrir eins stafs tölustafi, um fimm ára aldur hafa þau öðlast færni í að skrifa eins stafa tölu og við sex ára aldur geta þau skrifað tveggja stafa tölur. Þarna skiptir máli að börn hafi aðgang að hjálpargögnum og fái hvatningu til að æfa sig. Það að geta gefið til kynna fjölda með skriflegum táknum er eitt helsta tákn í átt að óhlutbundinni stærðfræðilegri hugsun (Clements, 2004a). Mörg börn þekkja tölustafina en hafa ekki nægilega færni í fínhreyfingum til að skrifa þá. Krafa um að skrifa tölustafi getur orsakað streitu hjá sumum börnum og því er nauðsynlegt að gefa þeim tækifæri á að æfa sig með grófhreyfingum eða hafa aðgang að tölustöfum sem þau geta notað í stað þess að verða að skrifa (Gifford, 2005). Flestir fullorðnir og jafnvel börn

skrifa tölur ómeðvitað, án orða og oft með lítilli leiðsögn. Strik og beygjur sem gerðar eru þegar tölustafir eru skrifaðir eru samsvörun við þekkinguna sem liggur að baki en þetta er ekki einfalt ferli og börn með námsörðugleika þurfa oft mikla leiðsögn. Baroody (1998) segir að nauðsynlegt sé fyrir kennara að vita þetta og jafnframt hlusta vel á börn, því ef barn spyr: „Hvernig skrifar maður sex?“ getur það þýtt að barnið þurfi að fá nákvæmar leiðbeiningar um hvernig eigi að byrja, í hvaða átt eigi að fara, hvenær eigi að stoppa o.s.frv. Þessa leiðsögn fá börn oft ekki þar sem kennaranum er ókunnugt um það sálfræðilega ferli sem liggur að baki því að læra að lesa og rita tölustafi. Rannsóknir hafa einnig sýnt fram á nauðsyn þess að tengja tölustafi á blaði við óformlega þekkingu á stærðfræði, þ.e. að tölustafirnir eru ekki bara númer heldur hafa merkingu (Baroody, 2004b).

3.5 Skilningur á reikniaðgerðum

Ung börn búa yfir undraverðri stærðfræðilegri hæfni sem felst í því að þau geta leyst einföld samlagningar og frádráttardæmi eða þrautir án orða og svo seinna meir með orðum og að auki geta þau líka leyst einfaldar deilingarþrautir (Baroody 2004b). Þegar börn byrja í grunnskóla eru þau flest byrjuð að telja og hafa ótrúlega færni í að nota talnaþekkingu sína til að leysa dæmi.

Skilningur á samlagningu og frádrætti er grundvallaratriði til að ná árangri í skólastærðfræði. Skilningur á þessum aðgerðum er nauðsynlegur til að börn geti skilið flóknar en þó skyldar aðgerðir eins og margföldun og brotareikning. Skilningur á samlagningu og frádrætti kemur við sögu í ótal tilvikum daglegs lífs. Rannsóknir hafa sýnt fram á að börn öðlast skilning á þessum reikniaðgerðum löngu fyrir skólaaldur. Álitamál er hversu snemma þetta gerist en þó er vitað að skilningur fer að þróast áður en börn geta glímt við reikniþrautir sem byggja á talningu sem er undanfari að hæfni til að nota rituð ták. Í fyrstu er samlagningin hlutlæg, þ.e. bundin við hluti, og takmarkast af fjöldanum 4 eða færri. Við fjögurra ára aldur geta börn lagt saman og dregið frá lágar tölur og gert það í huganum. Þau virðast geta kallað fram í huganum einhverskonar skilning á tölum (Baroody, 2004b). Börn nota oftast í upphafi „telja allt“ aðferðina, það er að segja þegar þau leysa dæmi þar sem tveimur er bætt við fimm þá byrja þau að telja fimm (1, 2, 3, 4, 5) og telja síðan tvo (1, 2) og telja síðan allt frá upphafi og ef þau hafa talið villulaust segja þau sjö

(Sarama og Clements, 2009). Önnur styttri leið sem þau tileinka sér síðar er „telja áfram“ aðferðin þ.e. þau byrja á hærri tölunni í dæminu en það auðveldar þeim að muna hvað er búið að telja og hvað er eftir. Baroody (1995) sá að börn með meðalgreind og þar fyrir neðan byrjuðu venjulega að telja fljótt eftir að þau uppgötvaðu regluna fyrir „næstu tölu á eftir“. Summan af $n + 1$ er talan á eftir n í talnarununni, t.d. summan af $5 + 1$ er talan sem er á eftir fimm: sex. Braden (1996) sá samskonar mynstur hjá börnum með námserfiðleika. Svo virðist sem þessi hvetjandi regla myndi hugtakalegan stuðning (e. scaffold) fyrir börnin til að telja áfram og hjálpi þeim að uppgötva talningaraðferðir (Baroody, 2004b).

Rannsóknir sýna að börn þróa sífellt fullkomnari talningatækni til að ákvarða summu eða mismun. Áður en börn fá formlega stærðfræðikennslu í grunnskóla geta þau leyst einföld samlagningar- og frádráttardæmi með tölum sem eru hærri en fjórir. Þau geta þetta því að þau skilja að grunnatriðið í samlagningu er að mengið verður stærra og að í frádrætti verður mengið minna. Börnin nota í fyrstu hluti til að tákna breytinguna. Ung börn gera sér líkan um þrautirnar (reiknidæmin) og nota iðulega „telja allt“ aðferðina. Þegar börn hafa náð ákveðnu stigi hætta þau að nota hluti en treysta þess í stað meira á talninguna og þá verður vandinn sá að átta sig á hve langt á að telja. (Baroody, 2004b). Á þessu stigi getur barnið séð fyrir sér í huganum aðra töluna og síðan bætt hinni tölunni við með talningu (Jónína Vala Kristinsdóttir, 2004).

Sambandið hluti – heild getur verið grunnur að því að öðlast skilning á þróaðri talnahugtökum sem fylgja á eftir. Það að skilja sambandið milli hluti - heild getur ýtt undir skilning á „talnafjölskyldum“ eða mismunandi nöfnum fyrir talnahugtök þ.e.a.s. tala sem kynnt er sem 5 getur líka verið $1 + 4$, $2 + 3$ o.s.frv. Þriggja ára börn eiga gjarnan í erfiðleikum með að samræma það að þekkja rétta talnaröð munnlega og að vita samhengið milli mæltra talna og einstakra hluta í menginu og þá sérstaklega hvar á að byrja og enda í talningu. En fjögurra og hálf til fimm og hálf ára gömul börn eiga í mestum erfiðleikum með að vita hvaða hluti er búið að telja og hverja ekki (Baroody, 2004a).

Börn hafa áhuga á að deila eða skipta á milli, jafnvel áður en þau læra að telja, og þau sýna rétt viðbrögð við sanngjörnum deilingardæmum sem felast í að skipta á milli. Mörgum börnum finnst margföldun vera einfaldari en frádráttur þar sem hið fyrrnefnda byggir á samlagningu en hið síðara á óformlegum útreikningi sem er tiltölulega erfitt að gera í

huganum. Rannsóknir hafa að auki sýnt fram á að leikskólabörn geta skilið einföld brot í samlagningu og frádrætti þó þau viti ekki hvað brot er. Börn byrja að þróa hæfileikann til að leysa einfalda samlagningu eða frádrátt án orða. Börn sem eru þriggja ára geta leyst dæmi eins og $1+1$ og $2-1$ en fjögurra ára börn geta leyst dæmi eins og $1+2$, $3-2$ og $3-1$. Í næsta þroskaáfanga geta börn leyst samlagningar- og frádráttardæmi með notkun hjálpartækja (Baroody, 2004a).

Í skilningi á sambandinu hluti – heild þekkja börn að samsettur hlutir mynda ávallt ákveðna heild, t.d. 2 hlutir og 1 hlutur í viðbót verða alltaf 3 hlutir sama hvernig þeir koma saman. Þegar ung börn geta ekki leyst samlagningardæmi þar sem ein tala er lögð við aðra, skortir þau skilning á hluti – heild sambandinu. Rannsóknir sýna að á milli fimm og sjö ára aldurs uppgötva börn að hvort sem hluta 2 er bætt við hluta 1 eða öfugt þá er útkoman sú sama, hvort sem dæmið felur í sér óþekktar eða þekktar stærðir eða er sett fram skriflega. Í þrautum um hluta - heild er ýmist hlutinn eða heildin óþekkt t.d. í „Jóna á bolta og Sigga gefur henni einn bolta. Hvað á Jóna marga bolta?“. Börn læra víxlverkun fyrr ef dæmið felur í sér hluta – heild en þegar það felur í sér að breyta samlagningardæmum (Baroody, 2004a). Að veita börnum tækifæri til að fást við stærðfræðiþrautir af ýmsu tagi hjálpar þeim að ná árangri og byggja tengsl (Clements, 2004a).

Griffin (2003) segir að kennarar hafi tilhneigingu til að halda að færni í útreikningi og næmi fyrir tölum séu tvö mismunandi form í stærðfræðikunnáttu. Færni í útreikningi virðist felast í vel æfðri og öruggri notkun á aðferð til að reikna hve margir hlutir eru í hóp eða hve margir þeir verða ef t.d. hópurinn blandast öðrum eða er skipt upp í smærri einingar. Tilfinning fyrir tölum virðist tengd djúpum skilningi á merkingu talna. Nýlegar rannsóknir á þróun stærðfræðikunnáttu sýna að sterk tengsl eru á milli færni í útreikningi og þess að hafa næmi fyrir tölum. Þetta þróast saman og annað fyrirfinnst ekki án hins.

Athugum aðeins eftirfarandi dæmi. Við sex ára aldur eða um það leyti sem börn eru að hætta í leikskóla eru þau fær um að leysa eftirfarandi dæmi sem sett er upp fyrir þau munnlega og án þess að gefa þeim nokkrar aðrar vísbendingar:

„Ég gef þér 4 súkkulaðistykki, svo gef ég þér 3 í viðbót, hve mörg súkkulaðistykki áttu þá?“

Hvaða kærsku nota leikskólabörn til að leysa þetta dæmi? Hvaða kunnátta (eða næmi fyrir tölum) liggur að baki þeirri hæfni? Í rannsókn sem Griffin og Case (1997) gerðu með þessu dæmi kom í ljós að börn gengu í gegnum fimm stig á aldrinum 3 til 6 ára til við að leysa þessa þraut:

- Stig 1. Börnin voru á aldrinum þriggja til fjögurra ára og flest þeirra gerðu enga tilraun til að leysa dæmið en svöruðu: „ég veit ekki“ eða „ég er ekki búin að læra þetta ennþá“
- Stig 2. Börnin voru á aldrinum fjögurra til fimm ára. Þá notuðu þau ekki útreikning eins og að telja á fingrum sér til að finna svarið heldur giskuðu: „mikið“, „5“ eða „10“. Þrátt fyrir að þessi svör séu röng þá eru þau ásættanleg. Börnin völdu nánast aldrei tölu sem var minni en fimm sem sýnir að þau höfðu einhvern skilning á samlagningu þ.e. vissu að svarið varð að minnsta kosti að vera hærra en fjórir.
- Stig 3. Börnin voru flest fimm ára. Mörg barnanna notuðust þarna við aðferðina að „telja frá einum“ með eða án fingranna til að finna svarið. Þau héldu gjarnan uppi fjórum fingrum á annarri hendinni og snertu hvern fingur til að telja þá, héldu síðan uppi þremur fingrum á hinni hendinni og töldu þá frá einum og upp í þrjá og að lokum töldu þau frá upphafi alla fingurna sjö. Það gerðu þau með því að snerta þá með nefinu eða kinka kolli í átt að hverjum fingri til þess að halda utan um talninguna. Vegna þess hversu flókin athöfn þetta er var auðvelt fyrir þau að ruglast í talningunni, en engu að síður færði þetta börnin nær réttu svari heldur en á stigi 2.
- Stig 4. Börnin voru á aldrinum fimm til sex ára. Hér notuðu börnin flóknari ráð í talningunni. Þau byrjuðu talningu sína iðulega á fjórum, sögðu svo næstu tölu fyrir ofan og notuðu gjarnan fingurna til að halda utan um hve langt þau voru komin í talningunni. Þetta sýnir töluvert meiri færni heldur en stig 3. En þarna þurfa þau að hafa tilfinningu fyrir tölum. Til dæmis þurfa börnin að vita að þau þurfa ekki að telja alla hlutina frá upphafi til að vita hve margir þeir eru; a) vegna þess að þau vita að talan 4 stendur alltaf fyrir fjóra hluti, b) næsta tala kemur í réttri röð (þurfa ekki að telja aftur frá einum) og c) það eina sem þau þurfa að gera er því að byrja

að telja frá fjórum og telja þrjá til viðbótar til að fá rétta tölu. Þau þurfa ekki einu sinni að ímynda sér rétta hluti í huganum.

- Stig 5. Þetta er hæsta stigið og þar nota börnin sín eigin kærskubrögð eða kunnáttu. Þau bregðast fljótt við, sækja í minni sitt rétt svar við spurningunni og þurfa ekkert að nota útreikning. Þegar þau eru spurð hvernig þau fóru að þessu segja þau; „ég bara veit það“ eða „þetta var í hausnum á mér“. Þau hafa notað töluna 4 svo oft að svarið við $4 + 3$ er greipt í minni þeirra (Griffin, 2003).

Við lok leikskólans hafa flest börn, sérstaklega þau sem hafa haft aðgang að ríkulegu og hvetjandi stærðfræðiumhverfi, farið í gegnum öll fimm stigin frá hinu lægsta til hins hæsta eftir því sem næmi fyrir tölum þróast. Ekki afla öll börn sér þessarar þekkingar af sjálfsdáðum, því verða kennarar að kynna fyrir börnunum viðeigandi leiki og spil sem efla þroska þeirra á þessu sviði. Það gerir börnunum kleift að byrja á því stigi sem þeim líður vel á og gefur þeim tækifæri til að þroskast á milli stiga á sínum hraða. Griffin og Case (1996) töldu mikilvægt að kenna börnum eftirfarandi:

- Að þekkja rétta röð talnanna frá 1 – 10. Ef börnin ætla að nota talningu til að leysa vandamál (sjá stig 3) verða þau að geta munað röð talnanna og geta notað hana áreynslulítið og nákvæmt við mismunandi aðstæður.
- Að skilja að hver tala í röðinni segir til um ákveðna stærð. Börnin þurfa þjálfun í að telja við mismunandi aðstæður til að átta sig vel á þessu (stig 4).
- Að þekkja að næst hæsta talan í röðinni þýðir að það þarf að hækka sig um einn. Börnin þurfa að læra hvernig talningin færir upp og niður $+1$ og -1 (stig 5).

Það er talið mikilvægt í verkefnum að börnin telji upphátt, noti fingur eða önnur hjálpargögn eins mikið og þau vilja, að þau útskýri ferlið og útkomuna munnlega með því að svara spurningum eins og „hvernig veistu þetta?“, „hvernig fannstu þetta út?“ (Griffin, 2003).

Mikilvægt er að börn fái að upplifa samlagningu og frádrátt í daglegu lífi en málfarið þarf að vera einfalt, tölurnar lágar og notast þarf við hluti

sem líkan. Ein áhrifamesta aðferðin við að leysa stærðfræðidæmi, sem tengjast daglegu lífi, er að börnin skilji aðstæðurnar vel, að þau geti teiknað eða yfirfært dæmið yfir á sig sjálf. Börn, sem læra að leysa stærðfræðidæmi í daglegu lífi eiga auðveldara með að leysa þyngri dæmi síðar meir og eru jafnframt að undirbúa sig fyrir algebru. Það eru til margar aðferðir sem börn hafa fundið upp til að leggja saman eða draga frá (Fuson, 2004).

Lausnleiðir barna við að leysa stærðfræðiþrautir eru eftirfarandi:

- Gera sér hlutrænt líkan (e. direct modeling).
- Talning (e. counting).
- Nota þekktar staðreyndir (e. number facts).
- Álykta út frá staðreyndum (e. deriving facts) (Carpenter, Fennema, Franke, Levi og Empson, 1999).

Ung börn nota hlutbundnar aðferðir og áður en barn hefur öðlast færni í talningu gerir það sér líkan af lausninni og hið sama gildir um ung börn eða börn sem hafa takmarkaða reynslu af að vinna með tölur. Þrátt fyrir að barn kunni að telja hlutgerir það þrautina í byrjun með því að telja hlutina eða tákinn. Síðan öðlast barnið færni í að nýta sér talningu án þess að búa sér til líkan, barnið getur séð fyrir sér fyrri töluna í huganum sem gerir því kleift að leggja síðari töluna við hana eða draga frá. Til að hafa góða yfirsýn yfir talninguna notast börn við fingur eða hluti. Börn læra ákveðnar staðreyndir um tölur þegar þau fást við að telja. Þegar tölur sem börnin þekkjá, koma síðan fyrir í þrautum geta þau nýtt sér þessar staðreyndir. Við endurtekna reynslu fara börnin svo að geta ályktað út frá þessari þekkingu (t.d. að $5 + 5 = 10$) og nýtt sér hana. Þrátt fyrir að börn hafi öðlast góða færni í að nota þekktar staðreyndir eða ályktanir við lausn á einföldum dæmum grípa þau gjarnan til þess að búa sér til líkan þegar þrautirnar þyngjast, eins og þegar útkoman er hærri en tíu. Rannsóknir hafa sýnt að ef börn fá tækifæri til að leysa þrautir með eigin aðferðum þróa þau með sér lausnaleyðir sem ákvarðast af fyrri reynslu þeirra og þroskastigi (Jónína Vala Kristinsdóttir, 2004).

Nemendur geta lært að reikna en skilja kannski ekki um hvað þrautin snýst, en ef þau læra frá upphafi að leysa reikniþrautir með teikningum eða öðrum hjálpargögnum styrkist skilningur þeirra. Það hentar ekki

öllum börnum það sama og því er mikilvægt að nemendur fái að nota sínar aðferðir við þrautalausnir til að hver og einn finni sína leið (Fuson, 2004). Rannsóknir hafa leitt í ljós að ef börnum er gefið svigrúm til að fara sínar eigin leiðir við lausn verkefna þá sýna þau fljótar framfarir og eru ánægðari og áráðnari við að leysa þrautir. Að auki leiðir samvinna milli nemenda til dýpri skilnings (Jónína Vala Kristinsdóttir, 2004).

3.6 Rúmfræði

Rúmfræði er sú grein stærðfræðinnar sem fæst við rými, form, stærð og lögun (Clements, 1998). Börn eru ung þegar þau eru farin að þekkja rúmfræðileg form. Tveggja ára gömul börn geta sett viðeigandi form í box sem er með formlaga götum og þriggja ára geta þau nefnt form með nafni. En þegar kemur að því að teikna form vandast málið, fjögurra ára gamalt barn getur hugsanlega teiknað þríhyrning fyrir tilviljun en á í erfiðleikum með að teikna formið eftir fyrirmynd. Sex ára börn eiga oft í erfiðleikum með að þekkja þríhyrninga sem eru óreglulegir. Æskilegt er að þau form, sem til eru á leikskólum séu til í ólíkum lit og efnivið þannig að börn tengi ekki formin eingöngu við t.d. ákveðna liti eða efni. Að þekkja formin felst ekki aðeins í því að geta parað saman eða nefnt form með réttu nafni. Að geta sagt til um hversvegna ákveðið form er ekki þríhyrningur er mikilvægur áfangi (Gifford, 2005).

Það er mikilvægt að ræða um rúmfræði við börn og sérstaklega að fá þau til að lýsa formunum, sérkennum þeirra og mismun. Fara frá hinu einfalda til hins flókna og kynna börnum nokkrar útgáfur forma, nokkrar stærðir hringforma og efla skilning barna fyrir mismunandi hornum. Börnum sem hafa góðan rúmfræðilegan skilning, gengur almennt vel í stærðfræði þar sem stærðfræði og hæfni í rúmfræði eru tengd sterkum böndum. Börn þjálfast snemma í rúmfræðilegri skynjn t.d. með því að byggja úr kubbum. Börn allt niður í þriggja ára geta búið til einföld og skiljanleg kort úr ýmsum hlutum eins og bílum, húsum og trjám. En þau eru orðin töluvert eldri þegar þau geta farið að teikna sín eigin kort. Með kortagerð læra börn mikilvæg hugtök varðandi rúmfræðilega afstöðu eins og hægri/vinstri, undir/yfir og áttirnar fjórar (Clements, 2004b).

Tveggja ára börn eru farin að flokka saman samskonar form þó þau séu að ólíkri stærð. Um þriggja ára aldur geta þau þekkt og nefnt með nafni hring og ferhyrning en það er í kringum fjögurra ára aldurinn sem þau þekkja þríhyrning. Í kringum fimm ára aldur hafa þau nokkuð góða

þekkingu á rétthyrningum, jafnvel með ólíka lögun og á svipuðum tíma eru þau farin að þekkja sexhyrninga, tígul og trapisu. Sex ára börn hafa öðlast yfirgripsmikla þekkingu þegar kemur að formum og þau forðast að gera mistök eins og að kalla sporöskjulaga form hring (Sarama og Clements, 2009).

Hjónin Pierre van Hiele og Dina van Hiele-Geldof (1959) settu fram fimm þrepa kenningu um þróun rúmfræðihugsunar. Þrepin byggja á kenningum Piaget en eru ekki flokkuð eftir aldri eins og í kenningum hans, heldur miða þau við að einstaklingarnir færast upp um þrep með auknum þroska og reynslu. Leikskólabörn tilheyra oftast fyrstu þrepunum:

- Þrep 0 - Sjónrænt (e. visualization). Hér greina börnin form sem þeim finnst vera með svipaða lögun saman út frá sjónrænni reynslu sinni.
- Þrep 1 - Greining (e.analysis). Hér eru börnin farin að greina formin eftir eiginleikum sínum t.d. hvað það er sem gerir rétthyrning að rétthyrningi.
- Þrep 2 - Óformleg afleiðsla (e. informal deduction). Hér eru börnin komin á það stig að þau eru fær um að hugsa um eiginleika hlutanna án takmarkana og geta rökrætt um form og eiginleika þeirra.
- Þrep 3 – Afleiðsla (e. deduction). Hér eru nemendur færir um að skoða meira en bara eiginleika forma. Þeir geta komið með óhlutbundnar lýsingar.
- Þrep 4 – Nákvæmni (e. rigor). Á þetta hæsta stig komast oftast bara þeir sem lagt hafa stund á rúmfræði sem vísindi.

Flest leikskólabörn eru á stigi 0 til 1. Á stigi 0 raða og flokka börn saman formum sem þeim finnst hafa sama útlit og hugsa ekki um eðli eða eiginleika formanna. Ferhyrningur er ferhyrningur af því að hann lítur út eins og ferhyrningur. En ef um er að ræða ferhyrning með 45 gráðu horn (en ekki 90 gráðu horn) myndi hann ekki flokkast með ferhyrningum hjá börnum á stigi 0 þar sem hann er ekki með eins útlit. Þegar börn eru komin á stig 1 greina þau form eftir eiginleikum sínum. Þau geta talið upp marga eiginleika forma (t.d. hafa fjögur horn, gagnstæðar hliðar eru

jafn langar, fjögur rétt horn o.s.frv.). Þau eru líkleg til að telja upp alla eiginleika ferhyrnings, rétthyrnings og samsíðungs en átta sig ekki á því að þessi form flokkast hvert undir öðru, þ.e. að allir ferningar eru rétthyrningar og allir rétthyrningar eru samsíðungar. Lögð er áhersla á að kennarar hlusti vel á börnin og greini getu þeirra samkvæmt þreunum þannig að þau fái verkefni við hæfi (Van De Walle, 2001). Grunnskólastærðfræði snýst um þrep 2 og á þrep 3 og 4 komast ekki einu sinni allir fullorðnir.

Rannsóknir hafa sýnt að börn öðlast skilning sinn á formum með aðgerðum en ekki með því eingöngu að skoða formin. Þau þurfa að fá svigrúm til að kanna form til fulls, hluta þeirra, eiginleika og umbreytingu, og þau þurfa að fá að túlka þau með því að teikna þau, byggja með þeim og lýsa þeim munnlega (Clements, 1998).

Þrátt fyrir að börn á þesum aldri séu töluvert frá því að skilja að fullu hvernig mælingar virka vita börn að við mælingar eru notuð tæki með tölum. Með mælingum er verið að gefa lengd, þyngd eða hraða ákveðna tölu svo hægt sé að bera hana saman við aðra mælingu eða tölu. Börn á leikskólum byrja að læra um mælingar með því að þekkja og ræða um hugtök eins og þyngd og lengd þó án þess að kunna formlega að mæla (Clements, 2004b). Lengd er auðveldasta og sýnilegasta mælingin fyrir ung börn að skilja. Þó eiga þau stundum í nokkrum erfiðleikum með að bera saman lengd t.d. bera þau saman hæð sín á milli þó annað barnið sé í skóm en hitt ekki. Fimm til sex ára gömul börn hafa gaman af því að nota málband og þessháttar mælitæki. En þegar þau eru beðin um að setja niður tölur á mælistiku þá byrja þau flest á 1 í stað 0 og huga ekki að því að hafa jafnt bil á milli talna. Börnum finnst þyngd erfið þar sem hún er ósýnileg. Algengt er að börnum finnist að stór hlutur hljóti að vera þyngri en lítill hlutur. Því þurfa börn að fá að veга, t.d. stóra létta hluti og litla þunga hluti til að öðlast dýpri skilning á þyngd (Grifford, 2005).

3.7 Stærðfræðierfiðleikar

Þrátt fyrir að rannsóknir hafi sýnt fram á að ung börn búi yfir stærðfræðilegri færni þá er mikilvægt að hafa í huga að þannig er málum ekki háttáð hvað öll börn varðar. Ekki hafa öll börn er hefja grunnskólagöngu, öðlast sömu þekkingu við upphaf skólagöngunnar og það þarf að hlúa sérstaklega að þeim börnum er standa verr að vígi. Kennarar þurfa að þekkja erfiðleikana, mæta börnunum á þeim stað sem

þau eru stödd og byggja svo ofan á (Perry, Young-Loveridge, Dockett & Doig, 2008).

Orðið *dyscalculia* eða *dyskalkúla* eins og það er gjarnan skrifað á íslensku merkir að eiga í erfiðleikum með tölur. Orðið *dys* merkir erfiðleika og *calculia* þýðir reikningur (Eiríkur Ellertsson, 2007). Vitneskja um að fólk geti átt í erfiðleikum varðandi stærðfræðihugtök, aðferðir og staðreyndir umfram það sem ætla mætti ef tekið er mið af greind viðkomandi eða getu í öðrum þáttum lífsins, hefur verið til staðar í hundrað ár. Samt hafa rannsóknir á þessu sviði ekki verið eins markvissar og t.d. rannsóknir á lestri eða lestrarerfiðleikum. Sennilega er orsökina sú að flestir líta svo á að lestrarfærni sé mun mikilvægari en góð kunnátta í stærðfræði. Það er auðvitað staðreynd að lestrarerfiðleikar geta haft í för með sér víðtæka erfiðleika í mörgu sem lýtur að daglegu lífi fólks. Engu að síður getur færni undir meðallagi í stærðfræði haft í för með sér mun skaðlegri afleiðingar en almennt er þekkt því stærðfræði kemur víða við sögu í daglegu lífi fullorðinna og að auki í frístundum (Siegler, 2009).

Hve mörg börn eiga við stærðfræðierfiðleika að etja? Sumar rannsóknir miða við að einungis 4% barna séu skilgreind þannig að þau eigi við stærðfræðihömlun (e. mathematics disabilities) að etja á meðan aðrar rannsóknir miða við allt að 48% barna. Rannsakendur, sem eru með ítarlegustu viðmiðin, vilja frekar tala um stærðfræðierfiðleika (e. mathematical difficulties) heldur en stærðfræðihömlun. Óljóst er hvort þarna er um að ræða ágreining um sama vandamál eða hvort verið er að greina ólík vandamál (Siegler, 2009).

Flestum rannsóknum ber þó saman um að um 6 til 7% fólks sé með meðfædda arfbundna stærðfræðihömlun og svo megi bæta við sambærilegri prósentutölu og þá sé um að ræða þá sem eigi við stærðfræðierfiðleika að etja sem eigi sér mismunandi orsakir (Eiríkur Ellertsson, 2007).

Þar sem ekki er einhugur um skilgreiningar hjá fræðimönnum gætir ósamræmis í hugtakanotkun. ICD-10 (alþjóðlegt heilbrigðisflokkunarkerfi) skilgreinir stærðfræðihömlun þannig að rekja megi hana til almenns seinþroska eða ófullnægjandi kennslu. Þar er miðað við að færni barnsins þurfi að vera marktækt lægri en búast megi við miðað við aldur og greind viðkomandi. Til að falla undir þessa skilgreiningu má viðkomandi ekki vera greindur með aðrar raskanir t.d. *dyslexíu*. Sé miðað við bandarískt geðheilbrigðisflokkunarkerfi, nefnt DSM-IV, þarf færni einstaklingsins

að hafa verið mæld með einstaklingsprófi og vera mun lægri en búast má við miðað við aldur, mælda greind og/eða kennslu. En samkvæmt þessu greiningarviðmiði geta einstaklingar verið með aðra örðugleika í námi eins og t.d. dyslexíu. Til eru fleiri viðmið sem gjarnan tengjast einstökum fræðimönnum eða samtökum. Fræðimenn á Norðurlöndum nota hins vegar orðið *dyscalculia* yfir allar tegundir örðugleika við að læra stærðfræði (Eiríkur Ellertsson, 2007).

En hvað útskýrir stærðfræðihömlun? Enginn hreinn og klár líffræðilegur þáttur hefur fundist en orsök stærðfræðihömlunar er talin vera af erfðafræðilegum toga. Petrill og Plomin staðfesta í sinni grein þetta mikla vægi erfða. En að minnsta kosti enn um sinn er aðeins hægt að skilgreina slíka hömlun hjá einstaklingum út frá hegðun þeirra (Siegler, 2009). Petrill og Plomin segja jafnframt frá tveimur tvíburarannsóknum (Alarcón, DeFries, Light and Pennington, 1997 og Oliver, 2004) sem gerðar voru til að kanna stærðfræðierfiðleika og þar voru fyrstu vísbendingar um að tengsl væru milli slaks árangurs í stærðfræði vegna gena og umhverfisþátta (Petrill og Plomin, 2009).

Stærðfræðierfiðleikar barna geta birst á mismunandi hátt og veikleikar verið á ýmsum sviðum. *Dyscalculia* er ekki frábrugðin öðrum námserfiðleikum að því leyti að hún er einstaklingsbundin, þ.e. hún getur verið lítil eða mikil og birtingarformið ólíkt eftir einstaklingum (Eiríkur Ellertsson, 2007). Gervasoni (2004) segir að þau börn, sem eru í hættu varðandi stærðfræðierfiðleika í skóla, hafi mismunandi þörf fyrir kennslu. Það þýðir að kennarinn þarf að sérsníða kennsluna fyrir hvern og einn því það er engin töfralausn til sem gildir fyrir alla (Perry, Young-Loveridge og fl. 2008). Sérfræðingar á sviði stærðfræðiörðugleika hafa bent á að hægt sé að finna þessi börn strax í leikskóla og ef brugðist er við með markvissum aðgerðum sé hægt að fyrirbyggja óæskilegar afleiðingar *dyscalculi*. Mæta þurfi nemendum á þann hátt að það taki mið af erfiðleikum þeirra (Eiríkur Ellertsson, 2007).

Erfiðleikar í stærðfræði koma fram hjá börnum ef þau hafa ekki nægileg tækifæri til að öðlast grundvallarfærni og skilning í notkun talna eða ef tölustafirnir tengjast ekki þeim hugmyndum sem þau hafa gert sér um merkingu þeirra (Baroody 2004a). Margar rannsóknir sem gerðar hafa verið sýna að það er ekki mikill munur á kynjunum í heildina. Þó virðist sem stúlkur sýni betri árangur á fyrri skólastigum á meðan drengir sýni betri árangur á síðari skólastigum. Hins vegar kemur í ljós að strákar eru

útsettari fyrir að eiga við erfiðleika að etja í stærðfræðinni heldur en stúlkur. Einnig hefur verið sýnt fram á að bandarísk börn af afrískum og rómönskum uppruna áttu í meiri erfiðleikum heldur en börn frá Asíu eða hvít börn. Hér er átt við börn búsett í Bandaríkjunum en ástæður eru óljósar (Royer og Walles, 2009).

3.8 Tengsl milli lestrar/málerfiðleika og stærðfræðierfiðleika

Flestir fræðimenn telja að orsakir stærðfræðihömlunar megi rekja til veikleika í starfsemi miðtaugakerfisins, þó það sé ekki algilt. Það er einnig talið að þeir einstaklingar sem eru með stærðfræðiörðugleika hafi veikleika í langtímaminni, í heyrnrænu skammtímaminni, í málþroska og sjónrænni rökhugsun. Stærðfræðihömlun getur líka verið einskorðuð við stærðfræði, það er að segja að erfiðleikarnir, sem koma fram varðandi stærðfræði, skerða ekki hæfni einstaklingsins til að ná árangri í öðrum námsgreinum. Hins vegar er talið að stærðfræðihömlun, sem er tilkomin vegna veikleika í starfsemi miðtaugakerfisins, fylgi einstaklingnum alla ævi. Talið er að um helmingur þeirra sem er með dyscalculiu sé einnig með dyslexíu (Eiríkur Ellertsson, 2007).

Samkvæmt ASHA (American Speech-Language-Hearing Association) er hægt að tala um Specific language impairment (SLI) eða málþroskaröskun þegar það felur í sér: 1. Tungumálið sjálft (hljóðkerfi, formfærði og setningafræði), 2. Innihaldið (merkingafræði) og 3. Notkun tungumálsins í samtölum og í hvaða mynd sem er. Málþroskaröskun er ekki hægt að rekja til annarra raskana. Börn, sem greinast með málþroskaröskun, hafa yfirleitt eðlilega heyrn, eðlilega greind og enga sýnilega tauga- hreyfi- eða skynröskun. Hugtakið vísar því ekki til einstaklings sem á erfitt með að læra tungumálið vegna vitsmunalegra eða líkamlegrar fítlunar. Talið er að allt að 7 til 10% allra barna eldri en fimm ára greinist með málþroskaröskun. Mörg þessara barna glíma enn við að ná færni í málþroska fram á fullorðinsár (Pence og Justice, 2008).

Börn með málþroskaröskun sýna oft mjög slakan árangur í stærðfræði. Landerl og félagar (2004) gerðu rannsókn á 8 og 9 ára gömlum börnum sem áttu í erfiðleikum með lestur eða stærðfræði og á börnum sem áttu í erfiðleikum í báðum þáttum. Fram kom að þau börn, sem áttu í erfiðleikum með stærðfræði og bæði lestur og stærðfræði sýndu svipað mynstur í meðferð talna en mynstrið var ólíkt hjá þeim sem áttu eingöngu

í erfiðleikum með lestur. Rannsakendur töldu að með þessu væri sýnt fram á að lestrarerfiðleikar einir og sér hafi ekki raunveruleg áhrif á meðferð talna (e. number processing). Hin miklu tengsl milli erfiðleika í lestri og málþroska útskýra enn frekar að málþroski og talnaskilningur þroskast í sittthvoru lagi. Hvort þessu er svona farið hjá öllum börnum með sértæka málþroskaröskun er ekki hægt að svara núna þar sem sambandið er ekki að fullu þekkt. Hins vegar er vitað að sum börn með málþroskaröskun virðast ekki eiga í erfiðleikum hvað varðar stærðfræði (Donlan, 2009).

4 Rannsóknin

Í þessum kafla verður fjallað um þær aðferðir sem rannsóknin byggir á, val á þátttakendum, hvernig gögnum var safnað, greiningu og úrvinnslu gagna, siðferðileg álitamál og trúverðugleika rannsóknarinnar.

4.1 Rannsóknaraðferð

Í þessari rannsókn voru notaðar eigindlegar rannsóknaraðferðir við öflun gagna og úrvinnslu þeirra.

Eigindleg aðferðafræði byggist á upplifun þeirra einstaklinga sem verið er að skoða og hvernig þeir upplifa það sem verið er að athuga hverju sinni. Algengar aðferðir í eigindlegri rannsókn eru vettvangsathuganir, athugun skjala, opin viðtöl og þátttakendaathugun. (Sigurlína Davíðsdóttir, 2003).

Rannsóknarsniðið er tilviksathugun þar sem ég beini sjónum mínum að því hvernig fimm ára börn leysa stærðfræðileg viðfangsefni. Einkenni tilviksrannsókna er að tilteknar aðstæður eru rannsakaðar til hlítar. Tilvikið, sem rannsakað er, verður því úrtakið þar sem tilgangurinn er að reyna að skilja tilvikið sem best (Gretar Marinósson, 2004).

4.2 Rannsóknarspurningin

Markmið rannsóknarinnar er að kanna stærðfræðiskilning fimm ára barna og hvaða stærðfræði þau beita í leik og starfi, kanna hvernig börn á þessum aldri leysa stærðfræðileg viðfangsefni og hvernig einstaklingsmunur á milli barna birtist. Til þess að fá sem gleggsta mynd af leiðum barnanna ákvað ég að leggja fyrir þau verkefni bæði einstaklingslega og í hóp og fylgjast með þeim saman í leik. Tilgangurinn er að niðurstöðurnar geti nýst leikskólakennurum í starfi. Með hliðsjón af ofangreindum markmiðum er rannsóknarspurning mín:

- Hvaða leiðir fara fimm ára börn við að leysa stærðfræðileg viðfangsefni?

4.3 Þátttakendur

Rannsóknarspurningin snýr að fimm ára börnum og því valdi ég elstu börn á leikskóla sem ég þekki vel til á. Leikskólinn er lítill og börnin þekkja mig nokkuð vel, hafa oft hitt mig og unnið hjá mér verkefni þó í mismiklu mæli sé.

Í hentugleikaúrtaki velur rannsakandinn þátttakendur eða úrtak sem auðvelt er að ná til. Kannanir sem byggja á hentugleikaúrtaki eru gjarnan lagðar fyrir þar sem um marga er að ræða eins og í kennslustofum skóla (Þórólfur Þórlindsson og Þorlákur Karlsson, 2003). Úrtak í tilviksrannsóknnum er sjaldnast valið af handahófi, heldur er horft til þess hvort það veiti t.d. nýjar upplýsingar eða þekkingu um fyrirbærið. Einnig horfir rannsakandinn til þess hvort væntanlegir þátttakendur eru reiðubúnir til þátttöku (Gretar Marinósson, 2004). Úrtakið í eigindlegum rannsóknnum er yfirleitt lítið og einstaklingarnir eru ekki endilega fulltrúar þýðis (Sigurlína Davíðsdóttir, 2003).

4.4 Gagnaöflun

Gagnaöflunin tók fjóra mánuði þar sem notast var við myndbandsupptökur og skráningu skriflegra gagna. Þátttakendur voru elstu börnin í leikskólanum og gagnanna var aflað við aðstæður sem börnin þekkja mjög vel það er í leikskólanum þeirra og þegar þau unnu verkefni með mér eða voru í leik með börnum sem þau umgangast daglega. Ég vildi fá góða sýn á hvernig börnin leysa stærðfræðileg viðfangsefni og því var gagnanna aflað á eftirfarandi hátt þegar börnin voru:

- Í einstaklingsvinnu.

Hér vildi ég skoða grunnfærni þeirra varðandi talnaskilning. Börnin vinna verkefnið í herbergi sem er í sameiginlegu rými í leikskólanum. Herbergið er nefnt Kot og börnin hafa margsinnis unnið að verkefnum þar og þekkja því aðstæður vel. Börnin sitja við borð og á borðinu er talnagrind, fjórtán tússlitir, tölustafir, blöð og perlur í tveimur skálum. Börnunum er sagt að þeim sé velkomið að notast við þessi gögn að vild. Þau vinna að verkefnum eitt og eitt í einu með mér. Sex börn taka þátt í þessu verkefni, fimm þeirra eru valin af handahófi og ég óskaði sérstaklega eftir samvinnu við eitt

barn. Verkefnin felast í talningu, ritun tölustafa og orðadæmum um sameiningu og aðskilnað. Í þessari rannsókn er eingöngu gerð grein fyrir talningahlutanum, það er. þegar þau telja 9 perlur og telja í runu.

- Að fást við stærðfræðiþrautir í hópi.

Hér vildi ég skoða lausnaleyðir barnanna með því að leggja fyrir þau þrautir úr daglega lífinu til að skilja hvað liggur að baki hverri aðgerð hjá þeim. Ég valdi fimm börn til að vinna með mér. Ég óskaði sérstaklega eftir þátttöku frá einu barni en hin fjögur eru valin af handahófi bæði út frá því hvaða börn eru mætt þennan dag og hverjir vilja taka þátt. Verkefnið fer fram inni á deild barnanna þegar hin börnin eru í útiveru. Börnin sitja við borð og á borðinu er talnagrind, tússlitir og blöð. Ég nota orðadæmi þar sem ég segi þeim stutta sögu og bið þau um að finna lausnina með mér. Ég nota nöfn sem þau þekkja og aðlaga sögurnar þeirra reynsluheimi. Til hliðsjónar hef ég lausnaleyða flokka SKSB (stærðfræðikennsla byggð á skilningi barna) og notast við þrautir um sameiningu, aðskilnað og margföldun og í öllum þrautum eru börnin að finna niðurstöðuna, þ.e. niðurstaðan er óþekkt. Lagðar eru fyrir þau fjórar þrautir en í þessari rannsókn er gerð grein fyrir lausnum barnanna á tveimur þrautum.

- Í leik:

Hér vildi ég skoða hvort og þá í hverskonar stærðfræðileikjum börnin eru og hvernig þau nýta sér efniviðinn sem er til staðar. Deildinni er skipt upp í nokkur valsvæði og tvisvar sinnum á dag fara börnin í valstund og velja sér þá ákveðið leikrými. Ég vel að fylgjast með börnunum í Vísindakoti en þar er efniviður sem meðal annars er hægt að nota í stærðfræðitengdum leikjum. Þar er rúmgóð hilla og þar hefur deildarstjórinn komið fyrir hlutum sem tengjast stærðfræði og börnunum er frjálst að nota þegar þau eru á þessu svæði. Þetta eru m.a. stór og lítil dýr, litlir plastbangsar í fjórum litum (gulur, rauður, grænn og blár), litlir og stórir marghyrningar í nokkrum litum, kaplakubbar, Numicon kubbasett fyrir leikskóla, vigt með tveimur hólfum, perlubútar í ólíkum stærðum og spjöld með samlagningardæmum (dæmi: $4 + 5 =$).

Upp á vegg hangir stór mynd af Numicon talnalínu frá 1 og upp í 21 og þar eru líka nokkrar ljósmyndir sem börnin tóku ásamt kennara sínum í vettvangsferð sem þau fóru í til að finna form úti í umhverfinu. Numicon kubbasett eru ensk stærðfræðinámsgögn sem hugsuð eru fyrir börn á aldrinum þriggja til tíu ára. Námsgögnin eru fjölskynja og gefa börnum m.a. tækifæri á að þekkja tölur sem heildir, sjá gildi þeirra og finna fjölda án þess að telja (Kristín Wallis, 2011).

Vísindakot er nokkuð rúmgott opið rými sem er afmarkað með stórrí mottu. Hér er um valstund barnanna að ræða þannig að þau börn sem eru í Vísindakoti hafa valið sér það sérstaklega. Ég hef því engin áhrif á hvaða börn eru á svæðinu á þeim tímum sem ég framkvæmi upptökurnar né í hvaða verkefnum þau eru þar. Um er að ræða fimm myndbandsupptök af leik barnanna, hver upptaka er um það bil tuttugu mínútur að lengd en í þessari rannsókn er gerð grein fyrir tveimur upptökum af leik barnanna.

Í eigindlegum rannsóknum er gagna yfirleitt aflað með vettvangsathugun, opnum viðtölum eða athugun skjala. Gjarnan er notast við upptökutæki (Sigurlína Davíðsdóttir, 2003). En rannsakandinn er þó oftast aðalrannsóknartækið og er sá sem horfir og hlustar eftir því sem þátttakendurnir segja og gera og kenningin sprettur að mestu leyti út gögnunum (Gretar Marinósson, 2004).

4.5 Skráning og úrvinnsla gagna

Greining hófst strax á söfnunarstiginu. Athafnir og orð barnanna af myndbandsupptökum og skráningum voru skráð orðrétt niður í tölvu. Alltaf var notast við myndbandsupptöku og samhliða skráði ég hjá mér niður á blað þau atriði sem mér þóttu mikilvæg. Í lokin voru rannsóknargögnin lesin og greind á skipulegan hátt. Með því vildi ég leitast við að draga fram þætti sem svöruðu rannsóknarspurningunni.

Greining gagna í tilviksrannsóknum fer venjulega fram samhliða gagnasöfnuninni og getur því haft áhrif á hvaða gögnum er safnað á síðara stigi ferlisins. Varðandi framsetningu gagna er lögð áhersla á lýsingu, greiningu og túlkun (Þuríður Jóhannsdóttir, 2009). Gagnaöflun,

samanburður við önnur gögn og ritun eru samtvinnuð ferli. Ritun greinargerðar hefur tvennskonar tilgang, annars vegar að koma niðurstöðunum niður á blað og hins vegar að skýra hugmyndir rannsakandans. Ritun er því hluti af gagnaöfluninni, skráningu gagnanna, greiningu þeirra og skýrslugerð (Gretar Marinósson, 2004).

4.6 Siðferðileg atriði

Á undanförmum áratugum hefur sífellt meira verið leitast eftir viðhorfum barna í rannsóknum sem varða líf þeirra. Sú sýn að líta á börn sem sérfræðinga í eigin lífi og sem hæfa einstaklinga til að gefa upplýsingar um eigin reynslu og sjónarmið hefur kallað á aukna þátttöku barna í ákvörðunum um eigið líf (Jóhanna Einarsdóttir, 2008). Rekja má þessa sýn um réttindi barna til *Samnings Sameinuðu þjóðanna um réttindi barnsins* (1989) eða *Barnasáttmálans* eins og hann er yfirleitt kallaður. Samningurinn var undirritaður af Íslands hálfu 26. janúar 1990 og öðlaðist gildi 27. nóvember 1992. Í sáttmálanum er talað um að börn eigi rétt á að láta í ljós skoðanir sínar og virða skuli rétt barna til frjálsrar hugsunar og sannfæringar. Einnig að börn hafi rétt til þátttöku og skuli njóta verndar fullorðinna (Samningur Sameinuðu þjóðanna um réttindi barnsins, 1989). Árið 2005 var sett fram viðbót við samninginn þess efnis að fyrstu átta árin (e. early childhood) í lífi barna væru sérstaklega mikilvæg og ítrekað að allar greinar sáttmálans eigi einnig við um það tímabil (United Nations, 2005).

Það er talið henta vel að einstaklingar og skólar, sem taka þátt í rannsókn, séu nafnlausir því annars er hætt á að lesendur lesi rannsóknina sem frétt um viðkomandi skóla eða einstaklinga í stað þess að skilja atburði sem dæmi um þau fyrirbæri sem eru til rannsóknar. Því þarf að breyta nöfnum og heitum á stofnunum eða stöðum í rannsókninni. Sækja þarf um formlegt leyfi til leikskólastjóra um aðgang að vettvangi á leikskóla. Þegar ræða á við börn yngri en 18 ára um persónuleg mál þeirra þarf heimild foreldra og einnig er mikilvægt að gera þátttakendum ljóst að þeir geti hvenær sem er hætt þátttöku (Gretar Marinósson, 2004).

Í þessari rannsókn hefur þess verið sérstaklega gætt að ekki sé hægt að rekja upplýsingar sem fram hafa komið til þátttakenda. Ekki eru gefin upp rétt nöfn á þátttakendum og nafn leikskólans kemur ekki fram. Leikskólastjóri á viðkomandi leikskóla veitti leyfi fyrir rannsókninni og foreldrar veittu leyfi fyrir myndbandsupptökum. Þrátt fyrir að leyfi

foreldra hafi verið til staðar var leitað eftir samþykki barnanna til þátttöku. Útskýrt var fyrir þeim hver tilgangur verksins væri og að þeim væri velkomið að hafna þátttöku hvenær sem er. Höfundur hefur einn aðgang að gögnunum og eftir notkun verður þeim eytt.

4.7 Trúverðugleiki

Þátttakendur í þessari rannsókn eru fáir en afmarka þurfti efnið vel vegna stærðar verkefnisins. Þetta gerir það að verkum að rannsóknin er lítil og gefur aðeins mynd af þessum tiltekna hópi í þessum tiltekna leikskóla.

Gagna var aflað með þrennu móti, þ.e. í frjálsum leik barnanna, einstaklingslega og í hópi og frá fleirum en einum aðila. Mat mitt er að styrkleiki rannsóknarinnar felist í trúverðugleika þátttakenda og því að niðurstöður koma heim og saman við fyrri rannsóknir á þroska og námi barna.

Í eigindlegum rannsóknum þurfa rannsóknir að vera trúverðugar og það þarf að vera hægt að sýna fram á að niðurstöður standist. Til þess að svo megi verða er hægt að nota fleiri en eina leið í gagnaöflun (margprófun) og safna gögnum frá fleiri en einum aðila. Niðurstöður eigindlegrar rannsóknar er yfirleitt ekki hægt að yfirfæra á aðra hópa þar sem þær eru bundnar ákveðnum aðstæðum. Því er það yfirleitt látið í hendur á lesandanum hvort niðurstöðurnar eigi almennt við eða ekki (Sigurlína Davíðsdóttir, 2003).

5 Niðurstöður rannsóknarinnar

Í þessum kafla verður gerð grein fyrir niðurstöðum rannsóknarinnar. Niðurstöðurnar byggjast á þremur gagnasöfnum og er skipt upp í kafla í samræmi við það. Í fyrsta kafla eru niðurstöður þar sem börnin unnu að verkefnum einstaklingslega. Í öðrum kafla er gerð grein fyrir niðurstöðum þegar börnin voru í skipulögðum hópverkefnum með kennara og í þriðja kafla eru niðurstöður af myndbandsupptökum af frjálsum leik barnanna.

5.1 Einstaklingsverkefni

Verkefni felast annars vegar í því að telja hluti og hins vegar að telja í runu. Sex börn tóku þátt í þessu verkefni en hér verður sérstaklega gerð grein fyrir lausnum þriggja barna. Börnin sitja við borð og á borðinu er talnagrind, fjórtán tússlitir, blöð, tölur og perlur í tveimur skálum. Börnunum er sagt að þeim sé velkomið að notast við þessi gögn að vild. Þau vinna að verkefnunum eitt og eitt í einu með kennara.

5.1.1 Að telja hluti

Börnin fá skál með níu perlum í og eru beðin um að telja perlurnar.

Gísli (5 ára) tekur skálina og sturtar úr henni á borðið fyrir framan sig. Perlurnar liggja í hrúgu þegar hann byrjar að telja. Hann bendir á hverja perlu með vísifingri án þess þó að snerta þær og telur: „1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, þær eru tíu“ segir hann. „Getur þú prófað að telja þær aftur?“ spyr ég. Gísli telur á sama hátt og áður með því að benda á hverja perlu og telur upphátt: „1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, átta“. Hann horfir á mig smá stund og bendir svo á eina perlu í viðbót og segir „níu“. „Eru þær níu“ spyr ég. „Getur þú sýnt mér hvernig þú sást það“. „Ég gleymdi þessari“ segir hann um leið og hann bendir á eina perluna á borðinu. „Ertu alveg viss?“ spyr ég en hann svarar engu.

Ásgeir (5 ára og 3 mán.) sturtar perlunum í hrúgu á borðið og byrjar að telja með því að benda á þær: „1, 2“ segir hann en bendir svo aftur á fyrstu perluna og segir: „1“, hikað eitt augnablik, „ég ætla að setja þær í röð“. Hann hefst handa við að raða perlunum í tvær láréttar raðir, fimm perlur í efri röðina og fjórar perlur í þá neðri. Síðan telur hann frá byrjun: „1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.“ „Af hverju fannst þér betra að setja þær í röð?“ „Af því að annars voru þær svona“ segir hann og setur perlurnar aftur

hrúgu. „Já einmitt og hvað gerist þá...?“ „Þá myndi ég ruglast.“ „Já þá myndir þú ruglast við talninguna, alveg rétt.“ Ásgeir raðar perlunum upp aftur og í þetta sinn í lóðréttar tvær raðir og sýnir mér. „Já þetta er líka góð aðferð við að telja perlurnar er það ekki?“ segi ég „Já, en það er ekki gott að hafa þær svona“ segir hann um leið og hann ruglar þeim enn á ný.

Rut (5 ára) sturtar perlunum á borðið, „ég ætla að setja þær svona“ segir hún um leið og hún dreifir úr þeim á borðið þannig að þær liggja ekki hver ofan á annarri. Hún byrjar síðan að telja þær með því að horfa á þær, kinka kolli í áttina að þeim og telja: „Ein, tvær, þrjár, fjórar, fimm, sex, sjö, átta.“ Ég spyr hana hvort hún vilji prófa að telja þær aftur fyrir mig. Rut jánkur því og telur núna með því að taka til sín eina og eina perlu í einu: „Ein, tvær, þrjár, fjórar, fimm, sex, sjö, átta, og níu,“ segir hún skælbrosandi.

Hin börnin þrjú leysa talninguna með því að taka til sín eina og eina perlu og telja um leið eða dreifa úr þeim og benda á hverja perlu fyrir sig um leið að þau telja, líkt og Rut gerði.

5.1.2 Að telja í runu

Í þessu verkefni bið ég börnin um að telja eins hátt og þau geta.

Gísli telur villulaust upp í 29 og stoppar þar.

Rut telur alveg villulaust upp í 39 og segir svo: „50“, telur síðan „51, 52,“ og áfram villulaust upp í 79 og segir þá: „Sjötíu og þrjátíu“ og byrjar svo aftur að telja: „31, 32, 33, 34, 35, 36, 38, 39“ og stoppar.

Ásgeir telur á fingrum sér það er hann réttir upp fingur í hvert sinn sem hann nefnir nýja tölu alveg þar til hann er kominn upp í 39 og stoppar þar. „Manstu hvað kemur næst?“ „Nei.“ „Næst kemur 40,“ segi ég, „já“ segir hann glaður og telur villulaust upp í 59 þar sem hann stoppar og segist ekki kunna meira.

Hin börnin þrjú stoppa í talningunni á bilinu 29 til 39 en eitt barnið telur villulaust og án hjálpar upp í 100.

5.2 Hópverkefni með kennara

Í þessu verkefni vinna fimm börn; Gísli (5 ára), Jón (5 ára og 6 mánaða), Marteinn (5 ára), Pétur (5 ára og 4 mánaða) og Sara (5 ára og 1 mánaða) að samlagningar og margföldunarverkefnum saman í hóp með mér. Þau

vinna verkefnið inni á deildinni sinni við borð og á borðinu er talnagrind, blöð og tússlitir.

5.2.1 Samlagning

Ég les dæmið upphátt fyrir börnin fimm:

„Það var strákur sem átti afmæli og hann átti 4 bíla. Hann fær 3 bíla í afmælisgjöf. Hvað átti strákurinn þá marga bíla samtals?“

Sara svarar strax: „Einn,“ en hún hafði, á meðan ég las dæmið, rétt upp fjóra fingur og síðan tekið þrjá fingur í burtu og þá var einn eftir.

Pétur snýr sér beint að talnagrindinni og færir til kúlurnar, á meðan ég les dæmið aftur. Hann snýr sér að mér og segir: „Sjö“. „Hvernig fannstu það út?“ „Ég taldi bara.“ „Já en hvernig, getur þú sýnt mér það?“ Pétur snýr sér aftur að talnagrindinni og færir fjórar kúlur án þess að telja: „Það eru fjórir,“ hann færir svo þrjár kúlur til viðbótar á talnagrindinni „og svo fékk hann þrjá og þá eru það sjö“ segir hann brosandí án þess að telja þær.

Marteinn situr hljóður og fylgist með en á meðan setur hann fjóra fingur vinstri handar upp í loft og þrjá fingur hægri handar, horfir síðan á fingurna og samsinnir svari Péturs með því að kinka kolli.

Ég sný mér að Gísla og spyr hvort hann hafi verið búinn að finna svarið. „Nei“ svarar hann dræmt. Ég spyr hann hvað strákurinn hafi átt marga bíla og hin börnin svara fjóra. „U hann vantaði bíl en ég er búinn að finna einn og núna vantar fjóra,“ segir Gísli. Ég spyr hann aftur hvað strákurinn hafi átt marga bíla og nú svarar hann: „Fjóra.“ „En hvað fékk hann marga í afmælisgjöf?“ spyr ég. Gísli svarar engu.

Marteinn situr við hliðina á Gísla og reiknar dæmið aftur með því að setja fyrst fjóra fingur upp í loft á annari hendi og þrjá á hinn og telja svo alla fingurna í hljóði. „Veist þú svarið Marteinn?“ spyr ég „Já það er sjö,“ segir hann. „Viltu sýna mér hvernig þú fannst það út?“ „Þá bara gerði ég“ hann horfir á fingurna á sér, hugsar sig um í smá stund og réttir upp sjö fingur, „ég bara var að hugsa og hugsaði humm en ég veit ekki alveg hvernig.“

Sara, sem í upphafi hafði dregið frá í staðinn fyrir að leggja saman, er nú búin að átta sig á mistökunum og sýnir mér lausn sína með því að setja fyrst fjóra fingur upp í loft, bæta síðan fimmta fingri við á sömu hendi og síðan tveimur fingrum á hinn hendinni og segir: „Sjö“.

Jón komst einnig að rétttri niðurstöðu með því að telja á fingrum sér.

Ég sný mér aftur að Gísla sem situr enn hljóður hjá og fylgist með. Ég ákveð að útbúa sambærilegt dæmi fyrir hann með lægri tölum og segi: „Gísli, ef þú átt tvo bolta og Marteinn gefur þér einn bolta, hvað áttu þá marga bolta?“ Gísli svarar engu. „Hvað áttir þú marga bolta fyrst?“ „Ég átti þrjá.“ „Þú áttir tvo manstu,“ segi ég. Ég reyni að sýna honum hvernig hann getur sett tvo fingur upp í loft á hendinni hans en hann virðist skilja illa hvað ég er að gera þannig að ég set í staðinn sjálf upp tvo fingur. „Þú átt svona tvo bolta og hvað ætlar Marteinn að gefa þér marga bolta?“ Gísli hugsar sig um augnablik en segir svo: „Einn“ „Alveg rétt og hvað áttu þá marga bolta?“ spyr ég um leið og ég bæti þriðja fingrinum við og sýni honum. „Þrjá“ segir hann. „Alveg rétt hjá þér, hvernig vissir þú það?“ Gísli horfir á mig og svarar engu, þannig að ég segi: „Af því að þú áttir tvo og Marteinn gaf þér einn.“ Hin börnin hafa setið hljóð hjá og eru að vinna en þegar ég segi síðustu setninguna segja þau öll „já“.

5.2.2 Margföldun

Ég les dæmið upphátt fyrir börnin fimm:

„Marteinn, Gísli og Sara fara inn í eldhús að hjálpa Önnu að baka. Marteinn bakar þrjár bollur, Gísli bakar þrjár bollur og Sara bakar þrjár bollur. Hvað bökuðu þau margar bollur samtals?“

Pétur byrjar strax að telja hljóðlega og segir svo: „Níu.“ „Hvernig veistu það?“ spyr ég? „Bara“ segir hann. „Má ég heyra hvernig þú gerðir þetta?“ „1, 2, 3, - 4, 5, 6, - 7, 8, 9,“ svarar hann.

„O, ég vissi þetta en ég náði bara ekki á tíma,“ segir Sara sem hafði byrjað strax að teikna sitt svar en var ekki búin þegar Pétur kom með svarið. Hún heldur þó áfram að vinna að sinni úrlausn og teiknar þrjár sporöskjulaga bollur af mikilli nákvæmni og leggur mikla vinnu í útlit bollanna. Bollurnar eru í þremur röðum og þrjár í hverri röð. Hún telur síðan bollurnar frá upphafi og segir: „Níu.“ „Flott, viltu sýna mér hvernig þú gerðir þetta, hver á þessar bollur?“ spyr ég um leið og ég bendi á eina bolluröðina. „Marteinn á þessar og Gísli á þessar“ segir hún og bendir á næstu röð af bollum „og ég á þessar“ og bendir á síðustu röðina. „Hvað eru þær margar?“ „Níu.“ „Hvernig veistu það?“ „Bara.“ „Taldir þú þær allar?“ „Já.“

Ari hófst strax handa við sína úrlausn. „Eru þetta krakkarnir sem bökuðu?“ spyr ég og bendi á þrjá hringi á blaðinu hans. „Nei þetta eru bollurnar,“ svarar hann. Hann heldur áfram og teiknar nú þrjár kúlur inn í hvern hring. Myndin lítur út eins og þrír pokar og í hverjum poka eru þrjár bollur. „Það voru níu bollur hjá mér“ segir hann stoltur. „Má ég sjá hvernig þú fannst þetta út?“ „Ég bara taldi þær.“ „Hver á þessar bollur?“ spyr ég og bendi á eina kúluna (pokann) með þremur bollum í. Ari svarar engu. „Inn í hvað settir þú bollurnar?“ Ari horfir á myndina sína en svarar ekki.

Ég sný mér að Marteini sem er búinn að teikna 10 litla hringi (bollur) í beina röð á sitt blað og hefur að auki skrifað töluna níu aftan við. „Hvernig fannst þú þetta út?“ „Humm ég taldi.“ „Hvernig taldir þú og vissir að þær áttu að vera níu?“ Marteinn telur: „1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10.“ Af hverju eru þær 10“ spyr ég. „Ég veit það ekki.“ „Hvað bakaðir þú margar bollur?“ spyr ég aftur. „Þrjár“ segir hann, „hvar eru þær?“ „Þær eru hérna,“ segir hann um leið og hann setur vísifingur fyrir aftan fyrstu þrjár bollurnar. „Já rétt en hvað svo?“ „Humm, þrjár bollur í viðbót,“ segir hann og hoppar með fingrinum yfir þrjár bollur til viðbótar. „Og þá koma aftur þrjár bollur,“ segir hann aftur og setur fingurinn fyrir aftan níundu bolluna. Síðan krotar hann yfir tíundu bolluna. „Hvað voru bollurnar sem krakkarnir bökuðu þá margar?“ spyr ég. „Níu“ svarar hann.

Gísli leggur ekki orð í belg en situr og fylgist með. Ég fer til hans og sé að hann er búinn að teikna sex hringi á blaðið sitt. „Má ég sjá hvað þú ert búinn að gera flott, ertu búinn að teikna bollur?“ Gísli svarar engu og horfir ekki á blaðið sitt. „Manstu hvað Marteinn bakaði margar bollur?“ „Tíu.“ „Hann bakaði þrjár, getur þú sýnt mér hvar hans bollur eru?“ spyr ég. Gísli svarar engu „Má ég sjá hvað þú ert búinn að teikna margar bollur?“ Hann bendir á hverja bollar fyrir sig og telur: „1, 2, 3, 4, 5, 6.“ „Alveg rétt hjá þér, þú ert búinn að teikna sex bollur.“

5.3 Í leik

Hér fylgdist ég með börnunum í Vísindakoti og ég fékk leyfi þeirra til að vera á svæðinu og fylgjast með þeim í leiknum. Á meðan á leiknum stendur geta þau leitað til mín eins og þau óska eftir og spurt mig spurninga en ég reyni að hafa sem minnst áhrif á framgang leiksins.

5.3.1 Samlagning

Lísa (5 ára og 6 mánaða), Ásta (5 ára) og Nonni (5 ára og 2 mánaða) sitja saman á gólfinu í Vísindakoti. Stelpurnar eru búnar að ná sér í box með skrifuðum samlagningardæmum. Að auki eru þær með 10 perlubúta sem deildarstjórinn á deildinni hefur útbúið fyrir börnin til að auðvelda þeim að telja. Perlubútarnir eru mismunandi að stærð, einn bútur er með einni perlu sem þrædd er upp á vír, næsti með tveimur perlum þræddum upp á vír og þannig áfram alveg upp búta sem hafa tíu perlur og hver bútur hefur sinn lit. Perlubútarnir eru þannig útbúnir að hægt er að festa þá saman sem auðveldar börnunum samlagningu það er þau geta sett saman tvo perlubúta þegar þau eru að leggja saman tvær tölur.

Lísa nær í spjald sem á stendur: $6 + 3 =$. Hún byrjar að telja perlubútana til að finna rétta stærð þegar Ásta réttir henni perlubút með þremur perlum á og segir: „Hér eru 3.“ Lísa tekur við perlunum og setur þær hjá tölustafnum þremur á spjaldinu sínu sem liggur á gólfinu. „Rauðu perlurnar eru 5,“ segir Nonni sem líka telur perlubútana. „Ég er að leita að 6,“ segir Lísa og tekur til sín allar perlurnar. „Þessar eru 9,“ segir Ásta sem var líka komin á fullt að telja perlubútana. „Finndu þitt spjald og við gerum þetta bara bæði,“ segir Lísa við Ástu sem fer og finnur sér annað samlagningardæmi. Lísa veltir perlunum um gólfið augnablik án þess að telja og segir svo: „Þér tókst að trufla mig Nonni.“ „Nei, ég er bara að horfa á,“ svarar Nonni. Lísa heldur áfram og dæsir mikið. „Hvernig gengur þér Lísa?“ spyr ég. „Ekki vel,“ segir hún um leið og hún færir sig örlítið í burtu frá krökkunum með spjaldið sitt og perlubútinn með þremur perlum á. „Þessar eru 6,“ segir Nonni glaður og réttir Lísu perlurnar. „Ég er að telja sjálf“ segir Lísa með ákveðinni röddu en tekur þó við perlunum af Nonna, telur þær aftur og setur perlubútinn hjá tölunni 6. „Búin með þetta,“ segir hún glöð. „Hvað er þá þetta mikið samtals?“ spyr ég. Lísa tekur annan bútin og telur: „1, 2, 3“ tekur svo upp hinn bútin: „4, 5, 6, 7, 8, 9, þetta eru 9.“

Ásta hafði sest til hliðar með sitt samlagningarspjald sem á stendur: $8 + 4 =$. Hún tekur upp búta með fjórum perlum á, telur í hljóði með því að benda á hverja perlu og spyr svo: „Eru fjögur fjórir?“ „Já, fjögur eru fjórir,“ segi ég. Ásta setur bútin á töluna fjóra á spjaldinu sínu og heldur svo áfram að telja búta þar til hún finnur réttan perlubút: „Ég fann 8, ég fann 8,“ segir hún glaðlega. „Flott og hvað er það mikið samtals?“ spyr ég. Ásta tekur búta tvo og krækir þeim saman. Telur svo frá upphafi

með því að benda með vísifingri á hverja perlu: „1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, það eru 12“ segir hún og horfir brosandi á mig og er greinilega mjög stolt.

Nonni hafði setið hljóður góða stund og fylgst með en sagði svo: „Núna veit ég hvað þið eruð að gera.“

5.3.2 Flokkun og form

Rut (5 ára og 2 mánaða), Birna (5 ára og 6 mánaða) og Ásta (5 ára) eru saman í Vísindakoti og eru búnar að velja sér litla þunna formkubba til að leika sér með. Þær eru einnig með ferkantað spjald með uppréttum speglahliðum á tvo vegu, þannig að það sem sett er á spjaldið speglast á tvo vegu.

Þær eru að flokka formin eftir litum og hafa sett gulu og rauðu formin á sitt hvorn staðinn. Bláu og grænu formin eru í einni hrúgu. „Æ, við skulum bara blanda þessu öllu saman aftur,“ segir Rut og byrjar að blanda gulu og rauðu formunum saman. „Já gerum það og líka þessum,“ segir Birna og nær í bláu og grænu formin. Þegar öll formin eru komin í eina hrúgu ná þær í speglaspjaldið. „Og svo byrjum við að gera eitthvað svona flott,“ segir Birna og setur einn ferhyrndan gulan kubb á speglaspjaldið. „Fyrst setjum við alla kassana,“ segir Rut og bætir við gulum ferhyrningi. „Látum bara allskonar kassa“ bætir hún svo við. „Hér er kassi“ segir Ásta og réttir Rut tígullaga form. „Nei ekki brotinn kassa“ segir Rut.

„Svona“ segir Birna þegar þær eru búnar að fylla eina rönd með ferhyrndum formum. „Núna setjum við svona,“ bætir hún við og tekur upp tígullaga kubb. „Já gerum það og svo setjum við aftur kassana sem eru eftir,“ segir Rut. Stelpurnar þrjár keppast við að raða tígulformunum í beina röð við hliðina á ferhyrningunum. Þær stoppa nokkrum sinnum þar sem röðin er sífellt að aflagast en halda samt ótrauðar áfram þar til verkinu er lokið.

„Nú setjum við alla kassana aftur og svo aftur svona,“ segir Rut og bendir á tígullaga kubb. „Við skulum vanda okkur,“ segir Birna og þær keppast við að raða ferhyrningum í beina röð. Þegar því verki er lokið eru komnar þrjár láréttar raðir, ein röð með ferhyrningum, önnur með tígullaga formum og sú þriðja með ferhyrningum. Birna leggur næst lárétt, langan samsíðung og segir: „Svona tilbúið“. „Nei, þetta er ekki tilbúið,“ segja hinar stelpurnar strax. „Núna getum við sett það sem okkur

langar, alls konar kubba og alls konar liti og allt,“ segir Ásta. Stelpurnar samsinna því og Ásta og Birna hefjast handa við að fylla flötinn sem eftir er og vanda sig að þekja flötinn alveg og þurfa því að láta formin passa vel saman til að mynda heild. „Birna, hjálpaðu mér áður en ég klára þetta. Við setjum bara allskonar, gula, bláa og græna og búum til svona mynstur,“ segir Rut og þær klára verkið. Þær sýna mér svo stoltar útkomuna og benda á hvernig mynstrið þeirra speglaðist á tvo vegu.

Ásta hefur á lokasprettinum fært sig til hliðar og finnur sér tvö misstór hringlaga form og nokkur tígulform. Hún setur litla hringlaga formið sem höfuð og stærra hringformið sem bók, tekur svo tvö tígulform og setur sem hár sitt hvoru megin við litla hringinn og tvö tígulform sem hendur út úr stærri hringnum og að síðustu tvö tígulform sem fætur neðan úr stóra hringnum. Hún sýnir mér stolt mynd af stelpu sem hún hefur búið til úr formunum.

6 Umræður

Í þessum kafla eru niðurstöður rannsóknarinnar ræddar og skoðað er hvaða lærdóm ég get dregið af þeim sem sérkennari í leikskóla og hugsanlega aðrir leikskólakennarar. Umræður um niðurstöður taka mið af fræðilegum bakgrunni rannsóknarinnar og viðleitni minni til að svara rannsóknarspurningunni.

Að höfðu samráði við deildarstjóra á elstu deildinni óskaði ég eftir að Gísli tæki þátt í talningarverkefninu. Gísli fær sérkennslu í leikskólanum vegna seinkaðs málþroska. Hann er fallegur og ljúfur strákur með góða nærveru og mjög góða samvinnuhæfni. Hann er með slakan orðaforða og málskilning auk framburðargalla. Gróf- og fínheyfingar eru einnig slakar. Gísli hefur lítið frumkvæði og gerir ekki miklar kröfur. Hann sækir lítið í verkefni er krefjast fínheyfinga, eins og að teikna, og verkefni sem reyna á tjáningu. Styrkleikar Gísla eru að hann er með gott lundarfar, er glaðlegur og samvinnufús. Hann á nokkra vini í leikskólanum og lyndir við öll börnin.

Í fyrstu fyrirlögninni kom í ljós að Gísli var með takmarkaðan talnaskilning og því óskaði ég einnig eftir þátttöku hans í hópverkefninu til að fá að fylgjast betur með honum. Hans lausnir eru því skoðaðar sérstaklega hér þar sem ég er að velta fyrir mér hvernig niðurstöðurnar geta hjálpað leikskólakennurum við að greina hvaða börn þurfa sérstakan stuðning og hvernig hægt er að sjá það. Áhugavert hefði verið að fylgjast með Gísla í leik en hann valdi aldrei Vísindakot í þau skipti sem ég fylgdist með börnunum þar í leik. Eftir á að hyggja hefði verið fróðlegt að fylgjast með í hverskonar leikjum Gísli var í sínum leik, og þá hvort hann var að fást við stærðfræðileg viðfangsefni. Þetta hefði gefið skýrari mynd af stöðu hans og svarað því hvort þetta sé svæði sem hann velur sjaldan og þá hvers vegna, því að kennarar þurfa að vera meðvitaðir um að mörg börn þurfa á hvatningu að halda.

Hugsanlega má segja að valsvæðið, þar sem ég ákvað að fylgjast með leik barnanna hafi kannski beint börnunum í átt að stærðfræðitengdum leikjum þar sem kennari þeirra hafði útbúið þetta svæði með það að markmiði að vekja áhuga barnanna á talningu. En mér þótti einmitt áhugavert að sjá hvort og þá hvernig börnin leysa stærðfræðileg viðfangsefni þar sem umhverfið er hvetjandi.

6.1 Einstaklingsverkefni - Telja hluti

Hér er rætt um verkefni hvers barns fyrir sig og síðan er heildarsamantekt.

6.1.1 Gísli (5 ára).

Þegar Gísli er beðinn um að telja perlurnar níu sturtar hann þeim úr skálinni og byrjar svo að telja án þess að aðgreina þær á nokkurn hátt.

Gísli er ekki búinn að koma sér upp nákvæmu skipulagi varðandi talningu á hlutum og því er talning hans ónákvæm. Hann er þó kominn á áleiðis í þessu ferli þar sem hann bendir á hverja perlu þegar hann telur en þar sem þær liggja allar í hrúgu er erfitt fyrir hann að halda utan um hvað hann er búinn að telja og hvað hann á eftir. Gísli telur perlurnar þrisvar sinnum og í hvert sinn fær hann nýja niðurstöðu.

Til að geta talið af nákvæmni ákveðinn fjöldi þurfa börn að hafa komið sér upp skipulagi á talningunni. Þetta skipulag getur verið að benda á hvern hlut um leið og talið er eða taka hlutinn til sín um leið og talið er til að aðgreina hann frá því sem eftir er að telja (Sarama og Clements, 2009). Til að geta sagt til um fjölda þarf barn í fyrsta lagi að geta talið rétt, í öðru lagi að geta talið hvern hlut í hópi og í þriðja lagi að vita hvað búið er að telja og hvað ekki (Baroody, 2004a).

Ekki er hægt að útiloka að ég hafi með svipbrigðum mínum sýnt Gísla að niðurstaða hans væri röng þegar hann taldi perlurnar í annað sinn, þó það hafi ekki verið ætlunin. Ég velti vöngum yfir því vegna atferlis hans, þar sem hann skyndilega bætir við einni perlu í talningu sinni. Þó er auðvitað ekki hægt að útiloka að hann hafi áttað sig á villunni þar sem hann rökstuddi athöfn sína með því að hann hefði gleymt einni perlunni. Það er einmitt um fimm ára aldurinn sem börn eru farin að geta leiðrétt sig þegar þau hafa talið rangt (Sarama og Clements, 2009).

Gísli veit að síðasta talan í talningunni segir til um fjöldann og það sýnir hann vel með því að í hvert sinn sem hann telur veit hann að síðasta talan í talningunni segir til um heildarfjölda. Vissa um að síðasta talan gefi til kynna heildarfjölda er eitt af skilyrðum þess að hægt sé að tala um að börn kunni fullkomlega að telja (Clements, 2004).

6.1.2 Ásgeir (5 ára og 3 mánaða).

Ásgeir byrjar á að telja perlurnar um leið og hann sturtar þeim í hrúgu á borðið en áttar sig greinilega á að hann getur ekki talið af nákvæmni allar perlurnar á þennan hátt. Hann raðar þeim því skilmerkilega í tvær raðir og hefst svo handa við talninguna. Hann sýnir mér líka að hægt er að raða perlunum á annan hátt þegar talið er.

Þegar börn átta sig á því að þrátt fyrir að ákveðnum fjölda hluta sé raðað upp á ólíkan máta verður heildarfjöldinn alltaf sá sami (Baroody, 2004a).

Segja má að Ásgeir hafi öðlast góða færni í talningu og noti þekkingu sína á skipulegan hátt til að komast að niðurstöðu. Til að hægt sé að segja að börn kunni fullkomlega að telja þurfa þau að vita að hver tala á við einn hlut, að talnaröðin er alltaf sú sama og að talan sem nefnd er síðast gefur heildarfjöldann til kynna, óháð því í hvaða röð talið er (Clements, 2004).

6.1.3 Rut (5 ára)

Rut er strax búin að móta sér skoðun á því hvernig hún vill raða perlunum áður en hún hefst handa við talninguna. Hún dreifir úr þeim til að hafa yfirsýn yfir fjöldann og hefst svo handa við að telja. Hún setur þær þó ekki í ákveðna röð eða aðgreinir á annan hátt til að vita hvað hún er búin að telja og hvað ekki. Hún horfir á tölurnar meðan hún telur með því að kinka kolli í áttina að hverri tölu. Þetta er flókin athöfn og því er auðvelt að ruglast í talningunni sem verður ónákvæm. Þegar ég spyr hana hvort hún vilji telja perlurnar aftur er líklegt að hún hafi áttað sig á mistökum sínum því núna beitir hún mun nákvæmari talningu en áður með því að taka til sín hverja perlu um leið og hún telur. Ljóst er að hún finnur sjálf að hún telur rétt í síðara skiptið því hún er kát þegar hún hefur lokið verkinu af miklu öryggi, þó hún hafi verið fljótfer í fyrra skiptið. Rut er örugg í sinni talningu og ljóst að hún hefur náð góðu valdi á talningu. Á þessum aldri hafa flest börn náð nokkuð góðu valdi á talningu og geta talið allt að 20 til 30 hluti þó nákvæmni þeirra sé háð einbeitingu hvers og eins (Baroody, 2005b).

6.1.4 Samantekt.

Rut og Ásgeir hafa náð góðum tókum á talningu og hafa góðan talnaskilning. Þau vita hvað þarf til að geta sagt til um fjölda í hóp með

góðri vissu. Ásgeir er nákvæmari í sinni lausn en Rut er sjálföruggari og skellir sér beint í að telja með því eingöngu að horfa. Hvort öryggi Rutar stafar af því að hún hafi meiri þjálfun í að telja en Ásgeir er ekki hægt að segja til um. Hins vegar er það augljós styrkur Ásgeirs að vera svona skipulagður og einbeittur í talningu sinni sem þýðir að hann telur af mikilli nákvæmni.

Gísli hefur öðlast þá meginfærni sem þarf að vera til staðar til að geta talið en hann er ekki orðinn leikinn í að telja og skortir skipulagshæfni til að geta talið með öruggum hætti. Leiða má líkum að því að hann hafi litla þjálfun í að telja.

Hin börnin þrjú sem taka þátt í verkefninu, hafa öll öðlast góðan talnaskilning og telja rétt á öruggan hátt. Þau hafa gott skipulag á talningunni með því að nota hreyfingu eins og að benda á hverja perlu um leið og þau telja eða með því að taka hverja perlu til sín.

Þessar upplýsingar varðandi talnaskilning barnanna eru mikilvægar fyrir kennarann til þess að hann geti áttað sig á stöðu barnanna og geti veitt þeim verkefni við hæfi eða greint hverskonar stuðnings þau þarfnast. Samtök stærðfræðikennara í Bandaríkjunum, leggja áherslu á að kennarar séu meðvitaðir um stöðu barna og að þeir meti fyrri þekkingu barnsins til að geta byggt upp nýja þekkingu (Fuson, 2004). Í rannsókninni *Project Good Start* kom fram að ef kennarar voru meðvitaðir um þróun stærðfræðiskilnings barna, settu sér skýr markmið varðandi talnavinnu og sáu börnunum fyrir námsefni sem stuðlaði að talnaskilningi var kennslan árangursrík fyrir börnin og þau sýndu mun betri talnaskilning (Thomson, Rowe, Underwood og Peck, 2005).

Stuðla þarf að því að börn fái aðgang að efnivið þar sem þau geta æft sig í að telja hluti. Kennarar þurfa að styðja við nám Gísla og tryggja að hann fái verkefni við hæfi og meta framfarir hans reglulega. Styrkleikar Gísla eru að hann er samvinnufús og er kominn með grunn sem hægt er að byggja ofan á.

6.2 Að telja í runu

Gísli stoppaði í sinni talningu við töluna 29 og má því álykta að hann hafi ekki ennþá lært að bera kennsl á regluna sem stjórnar talningunni.

Erfiðleikar í stærðfræði koma fram hjá börnum ef þau hafa ekki nægileg tækifæri til að öðlast grundvallarfærni og skilning í notkun talna (Baroody, 2004a).

Ásgeir og Rut eru bæði farin að átta sig á endurtekningu eða mynstri í talningu samanber þegar Ásgeir fær vitneskju um næstu tölu (töluna 40) og getur þá haldið áfram að telja og telur villulaust upp í 59. Rut, sem talið hafði villulaust upp í 39, hljóp yfir tug í talningu, sinni en hélt síðan áfram upp í 79. Þau vita að um endurtekningu er að ræða og átta sig á því að aðeins þarf að breyta um tug.

Þrjú önnur börn tóku þátt í þessu verkefni. Tvö þeirra stoppuðu einnig við töluna 39. En eitt barnið taldi villulaust upp í 100. Rannsókn Callahan og Clements sýndi fram á að flest barnanna sem gátu talið yfir 50, héldu áfram talningu þar til þau voru komin upp í 100. Rannsókn Aubrey sýndi að hæfni leikskólabarna til að telja getur verið ólík (Sarama og Clements, 2009) eins og árangur barna í þessari rannsókn staðfestir.

Öll börnin eru komin vel áleiðis varðandi að geta talið í runu og sum eru komin langt í þróun sinni. En það skiptir máli að skapa örvandi umhverfi til að öll börnin geti haldið áfram að öðlast reynslu í að telja.

Börn geta farið með talnarunu og talið upp í háar tölur þó þau hafi ekki vald á að telja svo marga hluti. En þau þurfa að læra þá endurtekningu sem er gildandi í tungumáli þeirra, sérstaklega þegar kemur að tölum sem eru hærri en tuttugu. Í rannsókn Callahan og Clements (1984) á sex ára börnum kom fram að tiltölulega hátt hlutfall barna stoppuðu í munnlegri talningu á bilinu 10 til 19, 20 til 29 eða 30 til 39. Þessar niðurstöður eiga við Rut, Ásgeir og Gísla sem öll stoppuðu í talningu sinni á þessu bili. Fullt vald á talningu snýr ekki eingöngu að endurtekningu heldur því að að geta borið kennsl á regluna sem stjórnar talningunni (Sarama og Clements, 2009).

6.3 Hópverkefni með kennara

Hér er fjallað um niðurstöður af hópverkefnum barnanna með kennara.

6.3.1 Samlagning

Á meðan ég las dæmið fyrir börnin byrjaði Sara strax að reikna. Hún notaði fingurna en í stað þess að leggja saman dró hún frá á réttan hátt.

Börn skilja, áður en þau fá formlega stærðfræðikennslu, að grunnatriðið í samlagningu er að mengið verður stærra og í frádrætti verður það minna (Baroody, 2004b). Þegar strákar fara að vinna

lausnir sínar áttar Sara sig á mistökum sínum og vinnur dæmið aftur með því að leggja tölurnar saman og fær rétt svar.

Samvinna milli nemenda um stærðfræðiverkefni leiðir til þess að skilningur þeirra á viðfangsefninu dýpkar (Jónína Vala Kristinsdóttir, 2004). Þegar börn deila hugmyndum sínum með öðrum finna þau sameiginlegar lausnir og geta lært að nota mistök sín á uppbyggilegan hátt (Hiebert o.fl., 1997).

Pétur er fljótur að átta sig á svarinu og til þess notar hann hlutbundna aðferð. Hann notar talnagrindina á skipulegan hátt. Þegar ég bið hann að útskýra lausn sína nánar á hann í erfiðleikum með að veita mér upplýsingarnar í orðum svo að hann sýnir mér á talnagrindinni hvernig hann fann lausnina. Það var auðveldara fyrir hann að sýna mér úrlausn sína heldur en að nota orð til að útskýra lausnina. Líkt og Pétur notar Jón hlutbundnar aðferðir og „telja allt“ aðferðina, en í stað talnagrindar notar Jón fingurna.

Í upphafi nota börn oftast „telja allt“ aðferðina, það er að segja þau leysa dæmi eins og $4 + 3$ með því að telja fyrst fjóra, síðan þrjá og telja síðan allt frá upphafi (Sarama og Clements, 2009). Það er talið mikilvægt að börn notist við hjálpargögn eins mikið og þau vilja. Hjálpargögn nýtast börnum til að sjá dæmið betur fyrir sér. Til að hafa góða yfirsýn yfir talninguna notast börn oft við fingur eða hjálpargögn eins og talnagrind (Griffin, 2003, Jónína Vala Kristinsdóttir, 2004).

Sara, Pétur og Jón er öll stödd á stigi 3 samkvæmt Griffin og Case en þeir segja að flest börn á því stigi séu um fimm ára og notist við „telja allt“ aðferðina (Griffin, 2003).

Marteinn telur í hljóði þannig að ég sé ekki nákvæmlega hvernig hann telur þar sem hann segir einungis útkomuna, en ég sé þó að hann notar fingurna. Þegar ég bið hann að segja mér hvernig hann hafi fengið svarið segist hann hafa hugsað svarið en hann viti bara ekki hvernig. Samkvæmt stigum sem Griffins og Case hafa sett fram má áætla að Marteinn sé á stigi 5. Börn á því stigi hafa svo oft notað töluna fjóra að summan af fjórum og þremur er greipt í huga þeirra og þegar þau eru spurð hvernig þau hafi fundið svarið segja þau iðulega: „Þetta var í hausnum á mér.“ (Griffin, 2003).

Gísli á í erfiðleikum með að finna lausnina. Hann virðist ekki skilja hvað hann á að gera. Á fyrsta stigi í skilningi á sambandinu hluti - heild þekkja börn að samsettir hlutir mynda ávallt ákveðna heild, t.d. að tveir

hlutir og einn hlutur í viðbót eru þrír hlutir. Þegar ung börn geta ekki leyst samlagningardæmi þar sem ein tala er lögð við aðra skortir þau skilning á hluti – heild sambandinu (Clements, 2004). Gísli hefur takmarkaðan talnaskilning og gefst upp á að leysa dæmið. Hann áttar sig heldur ekki á tilgangi þess að nota hjálpargögn til að finna lausnina. Þegar ég prófa að leggja fyrir hann samlagningardæmi með lægri tölum, þ.e. $2 + 1$ (þar sem hann á tvo bolta í upphafi og fær einn gefins) og spyr Gísla hvað hann hafi átt marga bolta þá svarar hann þrjá. Hugsanlega var hann búinn að leggja saman svarið í huganum og ég var sennilega fullfljót á mér að áætla annað þegar ég hélt áfram að sýna honum lausnina á hlutbundinn hátt. En hann leysti þrautina líka þannig og svaraði skilmerkilega þegar hann var spurður hve marga bolta hann hafði fengið gefins.

Mikilvægt er að börn upplifi samlagningu og frádrátt í daglegu lífi en huga þarf að því í byrjun að málfar sé einfalt, að tölurnar séu lágar og notast sé við hluti sem líkan (Fuson, 2004). Rannsóknir hafa sýnt að börn öðlast skilning á þessum reikniaðgerðum löngu fyrir grunnskólaaldur (Baroody, 2004b). Lausnir barnanna í þessari rannsókn koma heim og saman við það. Ung börn, eða börn sem hafa takmarkaða reynslu af að vinna með tölur, þurfa að gera sér líkan af lausninni (Jónína Vala Kristinsdóttir, 2004). Hiebert o.fl. segja að börn verði að fá að nota hjálpargögn við ólík verkefni, kynnast þeim og sjá tilgang með þeim því á þann hátt geti hjálpargögnin auðveldað þeim skilning á viðfangsefninu (Hiebert o.fl. 1997). Griffin og Case segja að við lok leikskólans hafi flest börn farið í gegnum stigin fimm, frá hinu lægsta til hins hæsta, eftir því sem næmi þeirra fyrir tölum eykst. Kennarar verða þó að hafa í huga að ekki aflla öll börn sér þessarar þekkingar af sjálfsdáðum og því verða kennarar að sjá til þess að börn hafi aðgang að ríkulegu og hvetjandi stærðfræðiumhverfi (Griffin, 2003).

6.3.2 Margföldun

Mörgum börnum finnst margföldun vera einfaldari en frádráttur þar sem hið fyrnefnda byggir á samlagningu en hið síðara á óformlegum útreikningi (Baroody, 2004a).

Pétur er fljótur að finna svarið og þegar ég spyr hann hvernig hann viti svarið sagði hann: „Bara.“ Hann virðist eiga auðvelt með að sjá fyrir sér tölurnar í huganum, þó hann eigi erfiðara með að útskýra með orðum

hvernig hann kemst að lausn sinni. En svar hans: „1, 2, 3, - 4, 5, 6, - 7, 8, 9,“ sýnir vel hvernig hann hugsar lausnina.

Skilningur á samlagningu og frádrætti er nauðsynlegur svo börn geti skilið flóknari aðferðir eins og margföldun. Við fjögurra ára aldurinn geta sum börn lagt saman og dregið frá lágar tölur í huganum. Þau virðast geta kallað fram einhverskonar skilning á tölum (Baroody, 2004b). Nýlegar rannsóknir á þróun stærðfræðikunnáttu sýna að sterk tengsl eru á milli færni í útreikningi og þess að hafa næmi fyrir tölum (Griffin, 2003).

Það reynist börnum auðveldara að leysa stærðfræðidæmi ef þau skilja aðstæður vel, geta t.d. teiknað dæmið eða yfirfært það á sig sjálf. Ef nemendur læra frá upphafi að leysa reiknisþrautir með teikningum eða öðrum hjálpargögnum styrkist skilningur þeirra (Fuson, 2004).

Sara, sem í fyrstu er svekkt yfir því hve fljótur Pétur er að svara, heldur áfram að teikna sína lausn. Hún leggur mikla vinnu í teikninguna, bollurnar eiga að líkjast sem mest raunverulegum brauðbollum. Hver bolla er sporöskjulaga og á hverja bolla teiknar hún nokkur lárétt strik til að fullkomna útlitið. Hennar líkan af þrautinni felst í því að hún teiknar þrjár bollur í þremur röðum, síðan útskýrir hún fyrir mér hver hefur bakað hvaða röð af bollum.

Mikilvægt er að stuðla að því að börn útskýri ferlið og útkomuna í verkefnum sínum upphátt því það ýtir undir skilning þeirra. Því þurfa kennarar að spyrja börnin spurninga eins og: „Hvernig veistu þetta?“ og „Hvernig fannstu þetta út?“ (Griffin, 2003).

Ari setur dæmið upp á annan hátt en Sara í sinni teikningu. Hann teiknar þrjá hringi og inn í hvern hring teiknar hann þrjár bollur. Hann getur hvorki útskýrt með orðum hvernig hann finnur þetta út né fyrir hvað hver hringur með bollunum inni í stendur en greinilegt er að hann skilur reiknisaðgerðina og afmarkaði lausn sína vel.

Marteinn kemur með þriðju teiknuðu útgáfuna af margföldunardæminu. Hann teiknar bollurnar í láréttri röð og skrifar töluna 9 fyrir aftan. Hann teiknar reyndar fyrst tíu bollur en áttar sig á mistökunum þegar hann sýnir mér lausnina. Hann telur: þrír, þrír og þrír í hópum og sér þá að ein stök bolla er eftir. Börn læra fyrst að telja hluti, síðan öðlast þau skilning á skrifuðum tölum og að nota tölur til að segja til um fjölda (Baroody, 2004). Að geta gefið til kynna fjölda með skriflegu tákni er eitt helsta skref í átt að óhlutbundinni stærðfræðilegri hugsun (Clements, 2004a). Marteinn hefur góðan skilning á því sem hann

er að gera. En þar sem hann afmarkar ekki bollurnar skýrt í hópa þegar hann teiknar þær missir hann yfirsýnina yfir hve margar bollur hann hefur teiknað. Talnaskilningur hans er góður og hann nýtir sér þekktar staðreyndir og fyrri þekkingu á skipulagðan hátt í lausn sinni.

Gísli hefur teiknað sex bollur á sitt blað. Þegar ég spyr hann hvort hann muni hvað Marteinn bakaði margar bollur svarar hann tíu. Svar hans stýrist sennilega af því að Marteinn situr við hlið hans og Gísli heyrir hann telja tíu bollur. Ég segi honum réttan fjölda og spyr hvort hann geti sýnt mér bollur Marteins en hann svarar engu um það og heldur ekki áfram með dæmið. Gísli á sennilega í erfiðleikum með að geyma dæmið í huga sér og missir því sjónar á því sem á að gera. En þegar ég bið hann að sýna mér bollurnar sínar telur hann þær alveg rétt með því að benda á hverja bollar og telja.

6.3.3 Samantekt

Börnin fimm í þessu verkefni standa sig öll mjög vel. Þau eru komin mislangt á veg í að þróa með sér lausnleiðir en flest þeirra ráða auðveldlega við þrautirnar.

Pétur, sem hefur næmi fyrir tölum notar þekktar staðreyndir og ályktar út frá þeim. Hann er snöggur að hugsa og grípa til aðgerða. Hins vegar á hann erfitt með að skýra lausnir sínar í orðum og þann þátt geta kennarar styrkt. Pétur er fullfær um að fást við þrautir af þessum toga.

Marteinn, Sara og Jón nota hvert sína aðferð við að teikna lausnina og var gaman að sjá hve útfærsla þeirra var ólík. Öll klára þau sín verkefni þrátt fyrir að svarið sé komið og eru glöð að finna lausnina. Það hentar ekki öllum börnum það saman og því þurfa börn að fá að nota sínar aðferðir við þrautalausnir þannig að hver og einn finni sína leið (Fuson, 2004). Ef börn fá svigrúm til að fara sínar eigin leiðir verða þau ánægðari og áráðnari við að leysa þrautir (Jónína Vala Kristinsdóttir, 2004).

Pétur, Sara, Marteinn og Jón nota öll hlutbundna aðferð og þurfa að gera sér líkan af þrautinni með því að nota talnagrind, fingur eða teikna skýringarmyndir. Þau geta auðveldlega ráðið við samlagningu og margföldun með lágum tölum. Þau geta kynnt niðurstöður sínar með frásögn og teikningum. Þessi börn ættu að fá fjölbreytt verkefni að vinna að.

Gísli hefur takmarkaðan talnaskilning og á í erfiðleikum í samlagningardæminu. Hann kemst þó lengra áleiðis með

margföldunardæmið þar sem hann byrjar að nota hlutbundna hugsun þegar hann teiknar bollurnar. Í fyrra dæminu vill hann ekki notast við nein hjálpargögn til að leysa dæmið en í margföldunardæminu teiknar hann eins og hann sér hin börnin gera. Hann ræður þó ekki við þrautina og veit ekki nákvæmlega til hvers er ætlast. Kannski var málfarið of erfitt eða tölurnar of háar. Þrátt fyrir að Gísli nái ekki að leysa margföldunardæmið, gerir hann grein fyrir þeim fjölda af bollum sem hann teiknar á blaðið, sem ég tel mikilvægt varðandi áframhaldandi stærðfræðihugsun hans.

Ekki afla öll börn sér þekkingar af sjálfsdáðum og þar kemur að hlutverki kennarans sem þarf að gera börnum kleift að byrja á því stigi sem þeim líður vel á og ekki síður að gefa þeim tækifæri til að þroskast á milli stiga á sínum hraða (Griffin, 2003). Ef byrjað er á einföldum þrautum geta börnin síðar meir yfirfært þær á flóknari þrautir (Fuson, 2004). Piaget lagði einnig ríka áherslu á að forðast að leggja of þungt efni fyrir börn (Pound, 2005). Gísli þarf að fá fjölbreytt tækifæri til að vinna að talningaverkefnum við hæfi og fá svigrúm til að kynnast notkun hjálpargagna.

6.4 Í leik

Hér er rætt um niðurstöður af leik barnanna.

6.4.1 Samlagning í leik

Lísa, Ásta og Nonni eru saman í leik. Stelpurnar eru að vinna með samlagningardæmi af spjöldum og Nonni fylgist með þeim og aðstoðar. Kennarar þurfa að skapa tækifæri og efnivið fyrir leikskólabörn til að fást við stærðfræðiverkefni og nota þarf sýnilegan áhuga þeirra sem upphafspunkt til að vinna út frá (Seo og Ginsburg, 2004). Piaget segir að það sé í verkahring hinna fullorðnu að skapa viðeigandi leikumhverfi fyrir börn (Pound, 2005).

Börnin eru áhugasöm og einbeitt í leik sínum, stelpurnar nýta sér hjálpargögn sem deildarstjóri þeirra er búinn að útbúa, á skipulagðan hátt til að finna lausn á samlagningardæmum. Börnin spjalla mikið saman og Lísa nýtur aðstoðar frá Ástu og Nonna þegar hún er að leita að réttum perlufjölda, en er engu að síður stolt með sinn þátt í verkinu að lokum. Vygotsky leggur mikla áherslu á hlutverk tungumálsins í þróun óhlutbundinnar hugsunar hjá börnum og enn fremur að hið félagslega

umhverfi sé mikilvægt afl í þroska hugsunar (Pound, 2005). Lísu fannst um tíma sér ganga illa og hún gæti ekki leyst þrautina en fékk síðan aðstoð félaga sinna til að klára verkið. Eitt mikilvægasta hugtakið hjá Vygotsky er svæði mögulegs þroska (ZPD) sem vísar til mismunar á þeim verkefnum sem barnið getur leyst án hjálpar og því sem það getur leyst með stuðningi frá öðrum (Vygotsky, 1978).

Eftir hvatningu frá Lísu fer Ásta og finnur til sitt eigið samlagningarverkefni sem hún leysir af mikilli einbeitingu og stolti. Í leik þroskast börn vegna fyrri reynslu, vegna hvatningar frá öðrum einstaklingum og af efniviðnum og öðlast þannig nýja þekkingu (Perry og Dockett, 2007).

Nonni nær sér ekki sjálfur í samlagningarspjald en hann er fullgildur þátttakandi í leiknum. Hann áttar sig greinilega ekki á því í byrjun að stelpurnar eru að leita að ákveðnum perlufjölda sem þær síðan para saman við tölurnar á spjöldunum svo þær geti lagt saman tölurnar tvær í lokin. En eftir að hafa fylgst með þeim segir hann í lokin: „Nú veit ég hvað þið eruð að gera.“ Bruner segir að barn verði að þekkja viðfangsefni sitt fyrst til að skilja það (Clabaugh, 2010).

Börnin þrjú í þessum leik styðja á skemmtilegan hátt hvert við annað. Með umræðum þeirra á milli hvetur Lísa Ástu til að fást við sitt eigið verkefni, Lísa nýtur aðstoðar félaga sinna við lausn á verkefninu sem hún er að gefast upp á og Nonni öðlast nýja þekkingu með því að vera virkur þátttakandi í leiknum. Vygotsky segir tungumálið gegna mikilvægu hlutverki í uppbyggingu þekkingar og að þekking verði til í samskiptum við aðra (Kalina og Powell, 2009).

6.4.2 Rúmfræði í leik

Rannsókn Ginsburg, Inoue og Seo (1999) sýndi fram á að sú rúmfræði, sem fjögurra og fimm ára börn eru oftast að fást við í frjálsum leik, tengist mynstri og lögun.

Rut, Birna og Ásta velja að leika sér með formkubba í nokkrum litum í frjálssa leiknum. Þær byrja á því að flokka formin eftir litum en fara svo að leika sér að því að búa til mynstur með ólíkum formum. Það er mikil samvinna í gangi á milli þeirra. Í aðalnámskrá leikskóla segir að í gegnum leik skapist tækifæri fyrir börn til að læra og skilja umhverfi sitt, tjá sig og þróa félagsleg tengsl við önnur börn (Menntamálaráðuneytið, 2010a).

Stelpurnar nota ekki rétt nöfn yfir formin í leik sínum. Rut talar iðulega um kassa og hinar stelpurnar átta sig á við hvað hún á og finna til ferhyrninga til að setja í mynstrið. Hiele og Hiele-Geldof settu niður þrep um þróun rúmfræðihugsunar. Leikskólabörn eru oftast á þrepi 0 en þar greina börn form eftir útliti (Van De Walle, 2001). Form með fjögur rétt horn er kassi af því að hann lítur út eins og kassi. Óreglulegur ferhyrningur er þá að sama skapi ekki kassi.

Börnin á deildinni höfðu nýlega verið í verkefnavinnu með formin og þar hafði verið umræða um eiginleika ferhyrninga og ferninga. Það hefði verið áhugavert að vita hvort Ásta var að hugsa um form með fjórum hornum þegar hún rétti Rut tígullaga form þegar þær voru að raða kössunum. En á þrepi 1 hjá Hiele og Hiele-Geldof eru börn farin að greina form eftir eiginleikum sínum og átta sig á hvað gerir ferhyrning að ferhyrningi (Van De Walle, 2001). Því hefði verið forvitnilegt að vita hvað bjó að baki hjá Ástu.

Að þekkja form felur í sér meira en að geta parað þau saman (Gifford, 2005). Mikilvægt er að fá börn til að lýsa formum, sérkennum þeirra og mismun (Clements, 2004b). Hiele og Hiele-Geldof leggja áherslu á að kenna barninu á því þrepi sem það er statt hverju sinni. Stelpurnar þurfa að fá tækifæri til að vinna með allskonar form, flokka þau, skilgreina og lýsa. Formin sem börnin hafa aðgang að á leikskólum þurfa að vera af ólíkum gerðum og úr margskonar efnivið til að efla skilning þeirra á formum enn frekar. Tækifæri til að byggja úr formum, taka þau í sundur, mynda ný og teikna þau eru líka allt þættir sem auka skilning barna varðandi form (Van De Walle, 2001).

6.4.3 Samantekt af leik

Kennarar eiga ekki að takmarka tíma barna sem eru að leika sér í stærðfræðitengdum leikjum og mikilvægt er að þeir leggi sig fram um að skapa umhverfi fyrir stærðfræðináms fyrir öll börn (Seo og Ginsburg, 2004). Dewey sagði að nám byggðist á athöfn og að börn ættu að læra af eigin reynslu og áhuga. Áhugi barna væri forsenda alls náms og leikurinn leið að þroska og menntun (Pound, 2005).

Börnin í þessari rannsókn eru að fást við fjölbreytta stærðfræði í leik sínum og sýna niðurstöður að börnin eru að vinna með mynstur, lögur, flokkun, stærðir og magn. Í rannsókn Ginsburg og félaga kom í ljós að

leikir eldri barna tengdust oftár tölum, mynstrum og formum (Seo og Ginsburg, 2004).

Börnin eru hugmyndarík, áhugasöm og einbeitt í leik sínum. Mikil samvinna á sér stað milli þeirra, þau deila hugmyndum sínum um viðfangsefnin og aðstoða hvert annað. Þau eru umburðarlynd hvert í garð annars. Búið er að skapa örvandi umhverfi og efnivið fyrir þau og þau eru spennt að takast á við ögrandi verkefni.

6.5 Lærdómar af niðurstöðum rannsóknarinnar

Markmið mitt er að niðurstöður geti nýst mér sem sérkennara og vonandi öðrum leikskólakennurum í starfi og því mun ég hér draga saman það sem ég tel að læra megj af þessum niðurstöðum.

Niðurstöður þessarar rannsóknar sýna að börn eru áhugasöm um stærðfræði og hafa hæfileika til að hugsa um stærðfræði sem tengist daglegu lífi þeirra. Fimm ára börn eru fær um að leysa þrautir sem tengjast samlagningu og margföldun. Börnin í rannsókninni notuðu hvert sína lausnaleið og mörg þeirra gátu útskýrt í orðum hugsun sína og lausnaleið fyrir hinum.

Með því að fylgjast með börnum leysa einföld stærðfræðiverkefni og fylgjast vel með hvernig stærðfræði þau eru að glíma við í leik sínum getur kennari metið stöðu barna. En til þess þarf hann að þekkja þróun stærðfræðihugmynda barna og vita hvernig börn á sama eða svipuðum aldri leysa stærðfræðileg viðfangsefni. Með slíka þekkingu er hægt að koma auga á börn eins og Gísla og í kjölfarið veita stuðning við hæfi til að þau geti þroskast áfram á sínum forsendum.

Niðurstöðurnar sýna að börn leika sér í fjölbreyttum stærðfræðitengdum leikjum. Börnin nýttu vel umhverfi og efnivið sem deildarstjórinn þeirra hafði útbúið. Samvinna milli barnanna var mikil og þau voru dugleg að aðstoða hvert annað. Mikilvægt er að skapa viðunandi umhverfi með efnivið og samræðum sem hvetja til áframhaldandi skilnings og taka mið af ólíkum forsendum barna til náms.

Af niðurstöðunum má ráða að hægt er að leggja fyrir efni sem mætir þörfum barna á mismunandi getustigum. Börnin sýna hvert öðru umburðarlyndi við lausn verkefna og eru stolt af lausn sinni þó önnur börn hafi komið með sambærilega lausn fyrir.

Að lokum má draga þann lærdóm að þrátt fyrir að börn þrói stærðfræðihugsun sína í gegnum leik með öðrum börnum er því ekki þannig farið hjá öllum börnum og því mikilvægt að kennarar leggi sitt af mörkum til að tryggja að öll börn öðlist reynslu af stærðfræði.

7 Lokaorð

Í upphafi rannsóknarinnar var sett fram rannsóknarspurning: Hvaða leiðir fara fimm ára börn við að leysa stærðfræðileg viðfangsefni. Ég tel að mér hafi tekist að gefa nokkuð góða mynd af fjölbreyttum leiðum þeirra fimmtán barna sem koma við sögu í rannsókninni.

Rannsóknin er ekki stór í sniðum en ég tel að hún gefi nokkuð góða mynd af stærðfræðihugsun fimm ára barna og viðfangsefnum þeirra hvað stærðfræði varðar. Gildi rannsóknarinnar felst í því að skoða, greina og hlusta til að öðlast meiri skilning á stærðfræðihugsun barna á þessum aldri og hvernig hægt er að greina stöðu þeirra. Tekið skal fram að það var ekki tilgangurinn að alhæfa um niðurstöður hennar enda það ekki í anda eigindlegrar rannsóknarhefðar. Tilgangurinn var að fá innsýn í stærðfræðihugsun ungra barna og markmiðið að niðurstöðurnar geti nýst leikskólakennurum í starfi sínu. Þess er vænst að rannsóknin og niðurstöður hennar styrki þær stöðir sem nauðsynlegar eru til að leggja ríka áherslu á stærðfræðináms ungra barna og auðveldi leikskólakennurum að láta sig stærðfræðináms ungra barna miklu varða.

Að lokum vil ég nefna að ánægjulegt er að sjá að meiri áhersla er lögð á þátt stærðfræðinnar í nýjum drögum að aðalnámskrá leikskóla heldur en gert er í gildandi aðalnámskrá og vonandi styrkir það og hvetur leikskólakennara enn frekar til að leggja áherslu á stærðfræðináms barna í leikskólum.

Segðu mér það,

ég gleymi því.

Sýndu mér það,

ég man það.

Leyfðu mér að fást við það,

þá skil ég það.

(kínverskt spakmæli).

Heimildaskrá

- Baroody, A. J. (2004a). The developmental bases for early childhood number and operations standards. Í D. H. Clements og J. Sarama (Ritstj.), *Engaging young children in mathematics*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Baroody, A. J. (2004b). The role of psychological research in the development of early childhood mathematics standards. Í D. H. Clements og J. Sarama (Ritstj.), *Engaging young children in mathematics*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Berk, L. E. og Winsler, A. (1995). *Scaffolding children's learning: Vygotsky and early childhood education*. Washington, DC: National Association for the Education of Young Children.
- Bradsford, J. D., Brown, A. L. og Cocking, R. R. (2000). *How people learn. Brain, mind, experience and school*. Washington, D.C.: National Academy Press
- Brown, S. (2009). *Play. How it shapes the brain, opens the imagination, and Invigorates the soul*. London: Penguin Books Ltd.
- Bruner, J. (1996). *The culture of education*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Carpenter, T. P., Fennema, E., Franke, M. L., Levi, L og Empson, S. B. (1999). *Children's mathematics. Cognitively guided instruction*. Portsmouth NH: Heinemann.
- Chu, C. L. og I, J. (2010). Evolution of constructivism. Í *Contemporary issues in education research*. Vol 3, 63.
- Clabaugh, G. K. (2010). *The educational theory of Jerome Bruner: a multi-dimensional analysis*. Sótt 4. febrúar 2011 af <http://www.docstoc.com/docs/50347916/The-Educational-Theory-of-Jerome-Bruner>
- Clements, D. H (2004a). Major themes and recommendations. Í D. H. Clements og J. Sarama (Ritstj.), *Engaging young children in mathematics*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

- Clements, D. H (2004b). Geometric and spatial thinking in early childhood education. Í D. H. Clements og J. Sarama (Ritstj.), *Engaging young children in mathematics*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Clements, D. H. (1998). *Geometric and spatial thinking in young children*. Sótt 5. mars 2011 af <http://eric.ed.gov:80/PDFS/ED436232.pdf>
- Dalvang, T. og Lunde, O. (2006). Med kompass mot mestring. Í *Nordic studies in mathematics education. Nordisk matematikdidaktikk*, 11, 37-67.
- Dewey J. (2000a). *Hugsun og menntun* (Gunnar Ragnarson þýddi). Reykjavík: Rannsóknarstofnun Kennaraháskóla Íslands. (Upphaflega gefið út 1910).
- Dewey, J. (2000b). *Reynsla og menntun* (Gunnar Ragnarson þýddi). Reykjavík: Rannsóknarstofnun Kennaraháskóla Íslands. (Upphaflega gefin út 1938).
- Dewey, J. (1938). *Experience and education*. New York: Macmillan.
- Donlan, C. (2009). Mathematical development in children with specific language impairments. Í D. B. Berch og M. M. M. Mazzocco (Ritstj.), *Why is math so hard for some children? The nature and origins of mathematical learning difficulties and disabilities*. Baltimore: Paul H. Brookes Publishing Co.
- Eiríkur Ellertsson (2007). Dyscalculia. *Flatarmál*, 1, 23-28.
- Fuson, K. C. (2004). Pre-K to grade 2 goals and standards: Achieving 21st-century mastery for all. Í D. H. Clements og J. Sarama (Ritstj.), *Engaging young children in mathematics*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Greter L. Marinósson. (2004). Etnógráfía í skólum. Glefsur úr rannsóknardagbók. *Glæður*, 1, 34-42.
- Gifford, S. (2005). *Teaching mathematics 3-5. Developing learning in the foundation stage*. Glasgow: Bell & Bain Ltd.
- Griffin, S. (2009). Early intervention for children at risk of developing mathematical learning difficulties. Í D. B. Berch og M. M. M. Mazzocco (Ritstj.), *Why is math so hard for some children? The nature and origins of mathematical learning difficulties and disabilities*. Baltimore: Paul H. Brookes Publishing Co.

- Griffin, S. (2004). Number worlds: a research-based mathematics program for young children. Í D. H. Clements og J. Sarama (Ritstj.), *Engaging young children in mathematics*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Griffin, S. (2003). Laying the foundation for computational fluency in early children. *Teaching children mathematics*, 6, 306-309.
- Hagstofa Íslands (2011). Mannfjöldi.
- Hiebert, J., Carpenter, T. P., Fennema, E., Fuson, K. C., Wearne, D., Murray, H. o.fl. (1997). *Making sense. Teaching and learning mathematics with understanding*. Portsmouth: Heinemann.
- John-Steiner, V. og Soubberman, E. (1978). Eftirmáli. Í Vygotsky, L. S., *Mind in society: the development of higher psychological processes*.
- Jóhanna Einarsdóttir. (2010). Reynsla og nám barna. Í Jóhanna Einarsdóttir og Ólafur Páll Jónsson (Ritstj.), *John Dewey í hugsun og verki. Menntun, reynsla og lýðræði*. Reykjavík: Háskólaútgáfan.
- Jóhanna Einarsdóttir. (2008). Þátttaka barna. Í Jóhanna Einarsdóttir og Bryndís Garðarsdóttir (Ritstj.), *Sjónarmið barna og lýðræði í leikskólastarfi*. Reykjavík: Háskólaútgáfan.
- Jónína Vala Kristinsdóttir (2004). Öll börn geta lært að reikna. *Glæður*, 1, 4-10.
- Kalina, C. J. og Powell, K. C. (2009). Cognitive and social constructivism: developing tools for an effective classroom. Í *Education*, 130, 2.
- Kristín Wallis. (2011). Upplýsingar um numicon. Sótt 14. apríl 2011 af http://silfurskogar.is/a_dofinni.html
- Lindquist, M. M. og Joyner, J. M. (2004). Mathematics Guidelines for preschool. Í D. H. Clements og J. Sarama (Ritstj.), *Engaging young children in mathematics*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Menntamálaráðuneytið. (1999). *Aðalnámsskrá leikskóla*
- Menntamálaráðuneytið. (2007). *Aðalnámsskrá grunnskóla –Stærðfræði*.
- Menntamálaráðuneytið. (2010a). *Drög að aðalnámsskrá leikskóla*.
- Menntamálaráðuneytið. (2010b). *Aðalnámsskrá grunnskóla - drög að almennum hluta*.

- OECD. (2001). *Starting strong. Early childhood education and care*. Sótt 1. apríl 2011 af <http://browse.oecdbookshop.org/oecd/pdfs/browseit/9101011E.PDF>
- Pence, K. L. og Justice, L.M. (2008). *Language development from theory to practice*. New Jersey: Pearson Education.
- Perry, B. og Dockett, S. (2008). Young children's access to powerful mathematical ideas. Í English, L. D. (Ritstj.), *Handbook of international research in mathematics education*. New York og London: Routledge.
- Perry, B., Young-Loveridge, J., Dockett, S. og Doig, B. (2008). The development of young children's mathematical understanding. Í *Research in mathematics education in Australasia 2004-2007*, 2, 870-874. Rotterdam: Sense Publishers.
- Perry, B. og Dockett, S. (2007). *Play and mathematics*. The Australian association of mathematics teachers. Sótt 1. sept. 2010 af <http://www.aamt.edu.au/Publications-and-statements/Position-statements/Suppo>
- Perry, B., Dockett, S. og Harley, E. (2007). Preschool education's sustained professional development in young children's mathematics learning [Rafræn útgáfa]. *Mathematics teacher education and development*. Special issue, 8, 117-134.
- Petrill, S. A. og Plomin, R. (2009). Quantitative genetics and mathematical abilities/disabilities. Í D. B. Berch og M. M. M. Mazzocco (Ritstj.), *Why is math so hard for some children? The nature and origins of mathematical learning difficulties and disabilities*. Baltimore: Paul H. Brookes Publishing Co.
- Pound, L. (2005). *How children learn*. London: Step Forward Publishing Limited.
- Plato (án ártals) sótt 12. febrúar 2011 af <http://www.goodreads.com/author/quotes/879.Plato>
- Royer, J. M. og Walles, R. (2009). Influences of gender, ethnicity, and motivation on mathematical performance. Í D. B. Berch og M. M. M. Mazzocco (Ritstj.), *Why is math so hard for some children? The nature and origins of mathematical learning difficulties and disabilities*. Baltimore: Paul H. Brookes Publishing Co.

- Samningur sameinuðu þjóðanna um réttindi barnsins. (1989). Sótt 20. mars 2011 af http://www.barn.is/adalsida/barnasattmalinn/barnasattmalinn_i_heild/.
- Sarama, J. og Clements, D. H. (2009). *Early childhood mathematics education research. Learning trajectories for young children*. New York og London: Routledge.
- Seo, K. og Ginsburg, H. P. (2004). What is developmentally appropriate in early childhood mathematics education? Lessons from new research. Í D. H. Clements og J. Sarama (Ritstj.), *Engaging young children in mathematics*. Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.
- Siegler, R. S. (2009). Foreword. The birth of a new discipline. Í D. B. Berch og M. M. M. Mazzocco (Ritstj.), *Why is math so hard for some children? The nature and origins of mathematical learning difficulties and disabilities*. Baltimore: Paul H. Brookes Publishing Co.
- Sigurlína Davíðsdóttir. (2003). Um úrtök og úrtaksaðferðir. Í Sigríður Halldórsdóttir og Kristján Kristjánsson (Ritstj.), *Handbók í aðferðafræði og rannsóknnum í heilbrigðisvísindum*. Akureyri: Háskólinn á Akureyri.
- Símon Jón Jóhannsson og Bryndís Sverrisdóttir. (1990). *Bernskan. Líf, leikir og störf íslenskra barna fyrr og nú*. Reykjavík: Örn og Örlygur.
- Sloane, M. W. (2007). First grade study groups deepen math learning. Í *Beyond the journal. Young children on the web*. Sótt 15. janúar 2009 af <http://www.naeyc.org/files/yc/file/200707/Sloane.pdf>
- Sousa, D. A. (2008). *How the brain learns mathematics*. Thousand Oaks: Corwin Press.
- Sylva, K., Roy, C. og Painter, M. (1980). Child-watching at playgroup and nursery school. *Oxford Pre-school Research Project*. Oxford: Grant McIntyre.
- The Australian association of mathematics teachers and early childhood Australia. (2006). *Position paper on Early childhood mathematics*. Sótt 23. september 2010 af www.aamt.edu.au/content/download/722/19512/./earlymaths.pdf
- Tomson, S., Rowe, K., Underwood, C. og Peck, R. (2005). *Numeracy in the early years: Project Good Start*.

- http://www.dest.gov.au/sectors/school_education/publications_resources/profiles/goodstart.htm#abstract sótt 18. Mars. 2011
- United Nations. (2005). *Convention on the rights of the child: General comment No. 7. Implementing child rights in early childhood*. Gefn:Höfundur.
- Van De Walle, J. A. (2001). *Elementary and middle school mathematics. Teaching developmentally*. New York: Longman.
- Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: the development of higher psychological processes*. Cambridge, MA: Harvard University Press.
- Wood, K. og Frid, S. (2005). Early childhood numeracy in multiage setting. *Mathematics education research journal*, 16, 80-99. Sótt 27. febrúar 2009 af http://www.merga.net.au/documents/MERJ_16_3_Wood.pdf
- Þuríður Jóhannsdóttir (2009). *Tilviksrannsóknir*. Sótt 20. mars 2011 af <http://mennta.hi.is/vefir/ust/tjona/tilviksrann.htm>
- Þuríður Jóhannsdóttir. (2001a). *Um félagslega hugsmiðahyggju*. Sótt 15. janúar 2010 af <http://mennta.hi.is/vefir/ust/tjona/hugsmid.htm>
- Þuríður Jóna Jóhannsdóttir (2001b). *Veiðum menntun í Netid. Um námskenningar og nýja miðla og áhrif þeirra á nám og kennslu*. Sótt 4. febrúar 2011 af http://mennta.hi.is/vefir/ust/tjona/medw.htm#_Toc506960078
- Þorlákur Karlsson og Þórólfur Þórlindsson. (2003). Um úrtök og úrtaksaðferðir. Í Sigríður Halldórsdóttir og Kristján Kristjánsson (Ritstj.), *Handbók í aðferðafræði og rannsóknnum í heilbrigðisvísindum*. Akureyri: Háskólinn á Akureyri.

