

Jafnstillingin

Þórunn Gréta Sigurðardóttir

Listaháskóli Íslands
Tónlistardeild
Tónsmíðar

Jafnstillingin

Þórunn Gréta Sigurðardóttir
Leiðbeinandi: Atli Ingólfsson
Vorönn 2011

Jafnstillingin hefur verið grundvallarviðmið í vestrænni tónlist hvað varðar ítónun og stillingu hljóðfæra að minnsta kosti frá því um miðja 19. öld. Hugmyndin að henni er þó mun eldri og mótun hennar tók langan tíma.

Pýþagóras og hans fylgismenn uppgötvuðu um árið 500 f. Kr. að samhljómi milli tveggja tóna mætti lýsa með hlutföllum og hlutföll milli lágra, heilla talna væru ómblíð. Þegar búinn var til tónstigi með þeim stærðfræðilegu aðferðum sem þeir settu fram blöstu ýmis vandamál við þegar kom að því að tónflytja hann.

Upp hófst leit að aðferð til að flytja tónstigann á mismunandi tóna án þess að hann hljómaði verr frá einum tón en öðrum. Um leið jókst eftirspurnin eftir fleiri ómblíðum tónbilum en áttund og fimmund en þríundin í tónstiga Pýþagórasar var heldur strekkt. Ýmsar óreglulegar stillingaraðferðir skutu upp kollinum og sú þeirra sem mestu máli skiptir er réttstillingin. Tónbil hennar samræmast að mestu leyti náttúrulegu yfirtónaröðinni og hljóma því einstaklega ómblíð. Hún tónfluttist hins vegar enn verr en tónstigi Pýþagórasar.

Nú hófust deildir um hvort vægi þyngra, ómblíðan eða tónflutningurinn. Sú niðurstaða sem náðist í þetta mál var jafnstillingin. Hún byggir á því að áttundinni er skipt í tólf tóna með jöfnu bili á milli. Með henni varð tónflutningur vandkvæðalaus, tónstiginn hljómaði eins frá öllum tónunum tólf. Hvað ómblíðu varðar er hún bæði eftirbátur réttstillingarinnar og stillingar Pýþagórasar. Eina rétt stillta tónbil hennar sem jafnframt byggir á hlutfalli milli ræðra talna, er áttundin. Öll önnur tónbil eru bjöguð á einhvern hátt en þó svo lítið að manneyrað námundar í meginatriðum að réttu tónbili. Þegar öllu er á botninn hvolft virðast enharmónískir kostir jafnstillingarinnar hafa vegið þyngra en ómblíðan svo eftir að hún var fullmótuð og hafði hlotið almenna viðurkenningu, ruddi hún öðrum stillingaraðferðum að mestu leyti úr vegi.

Inngangur	4
1. Hjóð og tíðni	5
1.1 Mæling á tíðni	5
1.2 Yfirtónar og tíðni þeirra	6
2. Stilling Pýþagórasar	7
2.1 Tónflutningur tónstiga Pýþagórasar	10
2.2 Fimmundaspírallinn óendanlegi	11
3. Réttstillingin	12
3.1 Samanburður á tónstiga Pýþagórasar og réttstilltum tónstiga	14
3.2 Tónflutningur réttstillta tónstigans	15
4. Jafnstillingin	15
4.1 Tónflutningur jafnstillta tónstigans	16
4.2 Samanburður jafnstillingar við yfirtónaröð og réttstillingu	18
4.3 Jafnstillingin í sögulegu samhengi	19
4.4 Uppruni tónstigans og þörfin fyrir jafnstillingu	25
4.5. Hugleiðingar um ávinninginn af jafnstillingunni	27
Niðurstöður	29
Heimildaskrá	30

Inngangur

Grunnur vestrænnar tónlistar er líklega öðru fremur díatóníski tónstiginn. Hann hefur oft verið kenndur við hvítu nóturnar á píanóinu og hefur að geyma sjö tóna en áttundi tónninn er í raun grunntónninn sjálfur, aðeins áttund ofar. Díatóníski tónstiginn inniheldur tvær litlar tvíundir og fimm stórar tvíundir. Ekki hefur tekist að sanna hvert hann rekur uppruna sinn, en svo virðist sem þörfin til þess að flytja tónstigann upp eða niður í tónhæð hafi skapast um svipað leyti og hann var uppgötvaður. Líklegt er að það hafi verið vegna mismunandi raddlegu söngvara.¹ Þegar svo kom að tónflutningi á hljóðfærum blöstu hins vegar við ýmis vandamál. Því fjær sem tónstiginn var fluttur frá upphafstóninum, því meiri bjögun varð á ákveðnum tónbilum innan hans. Upp hófust miklar rannsóknir og útreikningar á aðferð til að stilla hljóðfæri þannig að hægt væri að spila tónstigann frá öllum tólf tónum krómátíska tónstigans án þess að hann hljómaði verr frá einum tón en öðrum. Að auki urðu ýmis grundvallaratriði að vera virt, t.d. að ákveðin tónbil yrðu ekki bjöguð um of. Sú niðurstaða sem náðist í þetta mál var jafnstillingin, stillingarviðmið sem enn er við lýði og komst í almenna notkun um miðja 19. öld.

Hér verður saga jafnstillingarinnar rakin í grófum dráttum og reynt að varpa ljósi á tengsl hennar við helstu máttarstólpa vestrænnar tónlistar og tónfræði en það eru díatóníski tónstiginn, tólf tóna krómátíski tónstiginn, fimmundahringurinn og tónalckerfið.

Vert er að taka fram að hugtakið jafnstilling hefur verið notað yfir hvaða stillingu sem er þar sem skref milli allra nótna eru jafn stór, t.d. getur 6 nótna tónstigi verið jafnstilltur. Hér er hugtakið eingöngu notað um stillingu tólf tóna krómátíska tónstigans, þ.e. tónstigans sem inniheldur tólf tóna innan áttundar og skrefin milli þeirra eru öll jafn stór.

¹ Loy, Gareth, *Musimatics: The Mathematical Foundations of Music*, I. bindi, The MIT Press, Cambridge, 2006, bls 51.

1. Hljóð og tíðni

1.1 Mæling á tíðni

Þegar saga stillinganna er skoðuð er nauðsynlegt að þekkja nokkur grundvallarhugtök sem varða eðlisfræði hljóðs.

Hljóð er í eðli sínu þrýstingsbylgjur og hefur verið skilgreint á eftirfarandi hátt: „Fjaðrandi langsbylgjur sem berast gegnum efni; einkum haft um bylgjur sem mannseyrað nemur, þ.e. bylgjur með tíðni [á bilinu] 20-20.000 Hz.“²

Tíðni hvernar bylgju táknað hve margar heilar sveiflur eiga sér stað á tímaeiningu. Sú mælieining sem jafnan er notast við er Hertz (nefnd eftir þýska eðlisfræðingnum Heinrich Rudolf Hertz), skammstafað Hz og miðast við að tímaeiningin sé sekúnda. Ef tíðni tóns er 440 Hz sveiflast hljóðbylgjan 440 sinnum á sekúndu. Heyrmarkerfi mannsins, eða m.ö.o. mannseyrað, nemur tíðni tóns sem tónhæð. Eftir því sem tíðnin eykst, því meiri verður tónhæðin.³

Önnur mælieining á tíðni er sent og er sniðin að jafnstillingunni. Áttundin með sína tólf hálf tóna er 1200 sent og tíðni hálf tónanna innan hennar fundin með því að deila 1200 með 12. Hver hálf tónn krómátíska tónstigans í jafnstillingu er því 100 sent.⁴

Meginmunurinn á þessum tveimur mælieiningum er sá að tónbil mælt í sentum hefur alltaf sama tölulega gildi sama á hvaða tónsviði það er, en svo er ekki ef notast er við mælieininguna Hz. Tónn sem liggur áttund fyrir ofan annan tón af ákveðinni tíðni, t.d. 40 Hz, hefur alltaf tvöfalda tíðni upphafstónsins sem er í þessu tilviki 80 Hz og mismunurinn á gildunum er því 40 Hz. Sama reikniregla gildir ef um er að ræða tón af tíðninni 4000 Hz. Tónninn áttund fyrir ofan hann er af tíðninni 8000 Hz og er mismunurinn þá orðinn 4000 Hz. Ef áttund er á milli

² Dóra Hafsteinsdóttir og Sigríður Harðardóttir, *Íslenska alfræðiorðabókin*, 2. bindi, 3. prentun, Reykjavík, Örn og Örlygur, 2000, bls. 82.

³ Sethares, William A., *Tuning, Timbre, Spectrum, Scale*, önnur útgáfa, Springer-Verlag, London, 2005, bls. 12.

⁴ Sama rit, bls. 56.

tveggja tóna eru hins vegar alltaf 1200 sent á milli þeirra, hvort sem um er að ræða tóna af tíðninni 40 og 80 Hz eða 4000 og 8000 Hz.⁵

Það sem skiptir þó mestu þegar rætt er um stillingar, ómblíður og ómstríður með hefðbundnum hætti er hlutfallið milli tíðni tveggja tóna frekar en tölulegt gildi hennar. Þó getur verið nauðsynlegt að grípa til mælieininga í fræðilegri umfjöllun og hér verður notast við mælieininguna sent.

1.2 Yfirtónar og tíðni þeirra

Hljóð verður til þegar lofti eða einhverju öðru efni sem bylgjan getur borist eftir, er komið á hreyfingu með einhverjum hætti. Það gerist til dæmis þegar blásið er í trompet, þegar gítarstrengur er griplaður eða þegar barið er í borð. Þegar mannseyrað nemur flóknar hljóðbylgjur skynjar það í raun heila fjölskyldu af skyldum bylgjum. Þessar einingar sem hljóðbylgjan er samsett af nefnast yfirtónar og safn allra eininganna í heild nefnist hljóðróf.⁶

Þegar mannseyrað nemur hljóð greinir það í raun ekki hljóðbylgju, gerð bylgjunnar eða lögun, heldur hljóðrófið. Hljóðrófið veitir mikilvægar upplýsingar um samsetningu hljóðsins. Allt reglubundið hljóð er samsett af grunntóni af ákveðinni tíðni og margfeldum hans.⁷

Elsta og líklega einfaldasta aðferðin til að rannsaka yfirtóna er að skoða hljóðfærastreng. Þegar hann sveiflast án þess að komið sé við hann heyrst fyrsti yfirtónninn⁸. Þegar þrýst er laust strenginn á hann þar sem hann skiptist í tvennt heyrst annar yfirtónninn og hann sveiflast á tvöföldum hraða á við grunntóninn. Þegar þrýst er laust á strenginn þar sem hann skiptist í þrennt heyrst þriðji yfirtónninn, hann sveiflast á þreföldum hraða á við grunntóninn og þannig gengur þetta áfram koll af kalli.⁹

⁵ Joutsenvirta, Aarre, *The Basics of Acoustics*, 2005. Heimasíða Sibelíusarakademíunnar, 24. 2. 2009, sótt 31. 1. 2011. <<http://www.siba.fi/fi/>>.

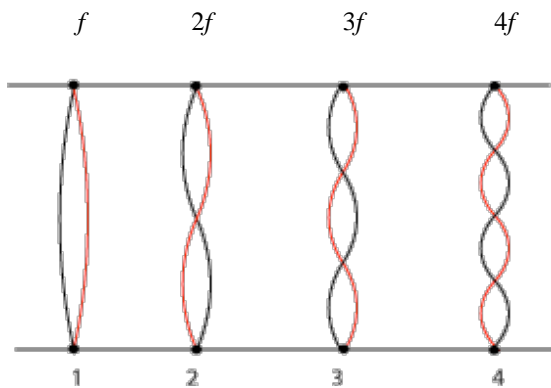
⁶ Sethares, 2005, bls. 13.

⁷ Sama rit, bls. 16.

⁸ Fyrsti tónn yfirtónaraðarinnar er grunntónninn og því strangt til tekið ekki yfirtónn. Annar tónn raðarinnar er í raun fyrsti yfirtónninn. Til einföldunar verður grunntónninn hér kallaður fyrsti yfirtónn og þannig koll af kalli svo númer yfirtónanna og númer sveifluháttanna standist á.

⁹ Sethares, 2005, bls. 17.

Myndin hér að neðan sýnir hvernig strengurinn sveiflast þegar yfirtónarnir eru myndaðir.



Mynd 1: Hvernig sveiflur strengs endurspeglar tíðni fyrstu fjögurra yfirtónanna.

Hljóðróf sem myndast með þessum hætti nefnist harmónískt hljóðróf og tónarnir sem það inniheldur náttúrulegir yfirtónar. Allir hlutir sem eru reglulegir að lögun gefa frá sér hljóð sem samansett er af náttúrulegu yfirtónunum. Þeir eru í raun óendanlega margir, en tuttugu fyrstu yfirtónarnir eru auðgreinanlegir og eru allir margfeldi fyrsta yfirtónsins.¹⁰ Ef tíðni fyrsta yfirtóns er f er tíðni annars yfirtóns $2f$, tíðni þriðja yfirtóns $3f$ o.s.frv.

2. Stilling Pýþagórasar

Stilling Pýþagórasar (u.þ.b. 550 f. Kr.) er elsta þekkt kerfi sem byggt er á tónstigum. Þetta kerfi hefur verið talið mun eldra en Pýþagóras en samt sem áður verið eignað honum í ritum, m.a. skráðum af Bóetíusi. Þar segir að Pýþagóras hafi skráð sambönd milli hljóðs sem hamrar járnsmiða hafi gefið frá sér. Frekari rannsóknir á þeim tónum sem best hljómuðu saman hafi svo leitt í ljós að hlutföllin milli massa hamranna hafi samsvarað hlutföllum milli lágra, heilla talna. Af þessum athugunum hafi hann ráðið að samhljómi mætti lýsa sem hlutfalli milli lágra, heilla talna.¹¹

Tónstigi Pýþagórasar byggir á áttundinni og fimmundinni, fyrstu tveimur tónbilum náttúrulegu yfirtónaraðarinnar. Með þeim er hægt að reikna út nótur díatóníska

¹⁰ Sama rit, bls. 17.

¹¹ Fauvel, John, Raymond Flood og Robin Wilson, *Music and Mathematics: From Pythagoras to Fractals*, Oxford University Press, Oxford, 2003, bls. 14.

tónstigans og jafnvel alla tóna krómátíska tónstigans. Að baki tónstiga Pýþagórasar liggja því fremur einfaldar stærðfræðilegar reglur. Þó er rétt að hafa í huga að stilling Pýþagórasar var aðeins notuð í díatónísku samhengi en var síðar yfirfærð á krómátískt og enharmónískt umhverfi.¹² Reglan sem tónstíginn byggir á er að taka tón og framleiða aðra í sambandi við hann sem byggja á hlutföllum heilla talna, en samkvæmt kenningum Pýþagórasar mun samhljómur tónanna innan hans, vera ómblíður. Tónstigi Pýþagórasar byggir á tíðnihlutföllunum 2 : 1 og 3 : 1. Þegar strengur gefur frá sér tón af tíðninni t er einfalt að láta hann svo gefa frá sér tón af tvöfaldri þeirri tíðni, þ.e. $2t$. Tónbilið milli nýja tónsins og upprunalega tónsins byggir því á hlutfallinu $2t : t$ eða $2 : 1$. Ef strengurinn gefur frá sér tón sem er þrisvar sinnum upprunalega tíðnin, þ.e. $3t$ er hlutfallið milli þess tóns og tónsins $2t$, $3t : 2t$ eða $3 : 2$. Ef sá tónn er færður niður um áttund er tíðni þess tóns því $3/2t$ og hlutfallið milli tíðni tónsins t og tíðni tónsins $3/2t$ því $3 : 2$. Þar með eru fundnir þrjú tónar sem samsvara C, G og C' úr C-dúr tónstiganum. Til einföldunar verður hér eftir notast við hefðbundin nótnanöfn þegar rætt er um tóna. Tónstíginn lítur því svona út:

$$\begin{array}{ccc} C & G & C' \\ t & 3/2t & 2t^{13} \end{array}$$

Við tónstígann hefur ekki aðeins bæst nýr tónn, heldur einnig nýtt tónbil til viðbótar við áttundina og fimmundina, nefnilega ferundin. Milli C og C' er hrein áttund, milli C og G er hrein fimmund og milli G og C' er hrein ferund. Til þess að finna hlutfall hreinu ferundarinnar þarf að deila C' með G, þ.e. $2t : 3/2t$ sem jafngildir því að margfalda $2t$ með andhverfu brotsins $3/2$ sem er $2/3$ en það gerir $4/3$. Þar með hefur enn einn tónn bæst við tónstígann, þ.e. tónninn sem er hreinni fimmund fyrir neðan C' og að sama skapi hreinni ferund fyrir ofan C, þ.e. F.

$$\begin{array}{cccc} C & F & G & C' \\ t & 4/3t & 3/2t & 2t^{14} \end{array}$$

¹² Barbour, James Murray, *Tuning and temperament: A historical survey*, önnur útgáfa, Dover Publications, New York, 2004.

¹³ Fauvel, 2003, bls. 15.

¹⁴ Sama rit, bls. 15-16.

Með því að notast við þessa hlutfallareikninga má finna enn fleiri tóna. Til að byrja með má reikna hlutfallið milli G og F með því að deila $3/2t$ með $4/3t$ sem er $9/8$. Þetta tónbil er kallað stór tvíund eða heiltónsbil. Með því að finna tóninn sem er hreinni ferund fyrir neðan G, þ.e. D, með sömu aðferð, sést að sama samband er milli D og C og er milli G og F, þ.e. $9/8$. Að lokum má nota heiltónshlutfallið til að fylla í eyðurnar sem nú eru í tónstiganum. Til að finna tóninn sem er hreinni fimmund fyrir ofan D, þ.e. A, er $9/8t$ margfaldað með fimmundahlutfallinu $3/2t$ sem gefur hlutfallið $27/16$. Til að finna tóninn ferund fyrir neðan A, þ.e. E, er $27/16t$ deilt með ferundahlutfallinu $4/3t$ sem gefur hlutfallið $81/64$. Að lokum er svo hægt að finna tón sem er fimmund fyrir ofan E með því að margfalda $81/64t$ með fimmundahlutfallinu $3/2t$ sem gefur hlutfallið $243/128$. Nú á aðeins eftir að finna út hvert hlutfallið er sem myndast milli F og E annars vegar og C og H hins vegar. Það er gert með sambærilegri aðferð, þ.e. með því að deila hlutfalli F, $4/3t$, með hlutfalli E, $81/64t$, sem gefur hlutfallið $256/243$. Þetta tónbil er kallað lítil tvíund eða hálfónsbil og myndast einnig milli C og H. Það sem við blasir eru átta tónar og skrefin á milli þeirra eru ýmist hálfónsbil eða heiltónsbil. Með því að notast aðeins við hlutföll fimmundarinnar og ferundarinnar var þannig hægt að skilgreina sjö tóna tónstiga sem kenndur er við Pýþagóras og leit hann þá svona út:

Tónn	C	D	E	F
Tíðni	1/1	9/8	81/64	4/3
Tónbil	9/8	9/8	256/243	9/8

Tónn	G	A	H	C'
Tíðni	3/2	27/16	243/128	2/1
Tónbil	9/8	9/8	256/243	

Nefnum þennan tónstiga P¹.¹⁵

Sjö tóna tónstigi Pýþagórasar er elsta útgáfa af díatóníska tónstiganum eða dúr tónstiganum. Díatónískir tónstigar sem innihalda fimm heiltónsbil og tvö hálfónsbil eru grunnur vestrænnar tónlistar. Tónstigi Pýþagórasar inniheldur eins

¹⁵ Sama rit, bls. 16.

margar hreinar fimmundir og eins margar hreinar ferundir og mögulegt er innan einnar áttundar með því að nota einungis hlutföllin $3/2$ og $4/3$ til þess að reikna út tónhæðina.¹⁶

2.1 Tónflutningur tónstiga Pýþagórasar

Pýþagóras áttaði sig á því að hægt væri að færa tónstigann til, þ.e. byrja ekki alltaf á sama tóni. Með þá ví að margfalda hlutföllin úr tónstiganum P^1 með fimmundahlutfallinu $3/2$ var hægt að flytja hann allan upp um fimmund. Þegar allir tónar nýja tónstigans eru staðsettir innan einnar áttundar, sem gert er með því að deila með tveimur þar sem þörf er á að flytja tón niður um áttund, sést að þeir komu allir fyrir í tónstiganum P^1 nema sá sjöundi. Þannig áttaði hann sig á þeirri skekkju sem myndast þegar tónstigin er spilaður út frá fimmund tónstigans. Til þess að sjöundi tónn tónstigans frá G hljómi eins og í tónstiganum frá C þurfti að bæta nýjum tóni við sem lægi á milli F og G, þ.e. Fís. Tíðni hans er, ef hlutfallareikningum Pýþagórasar er fylgt, ekki nákvæmlega mitt á milli tíðni tónsins F og tíðni tónsins G, heldur er hún örlítið nær tíðni tónsins G en F. Það er af því að hálfþónsbilið milli sjöunda og áttunda tónsins í tónstiga Pýþagórasar er ekki „hálf“-þónsbil í eiginlegum skilningi. Til að finna tón sem er hálfþón fyrir ofan annan tón, þarf að margfalda hann með hálfþónshlutfallinu. Ef hálfþónsbil Pýþagórasar væri í raun helmingur heiltónsbilsins ætti brotið $256/243$ margfaldað með sjálfu sér að jafngilda heiltónsbilinu sem er $9/8$. Það gerir það hins vegar ekki eins og sést hér að neðan:

$$256/243 \times 256/243 = 256^2/243^2 = 1,10985\dots$$

$$9/8 = 1,125$$

Hálfþónsbil Pýþagórasar er því þrengra en það ætti að vera.¹⁷

Nýja tónstigann frá G má nefna P^2 .

Eins má færa tónstigann á F fimmund fyrir neðan C, en þar er það fjórði tónn tónstigans sem þarfnast leiðréttingar við, þ.e. H. Með hlutfallareikningum Pýþagórasar fæst tíðni sem aftur er ekki mitt á milli tíðni tónsins A og tónsins H

¹⁶ Sethares, 2005, bls. 54.

¹⁷ Fauvel, 2003, bls. 16.

heldur örlítið nær A af sömu ástæðu og tónninn Fís liggur ekki mitt á milli F og G. Þennan tónstiga má nefna P^{-2} .¹⁸

Þegar rætt er um tóna tónstigans er fyrsti tónninn gjarnan sagður vera á fyrsta sæti tónstigans, annar tónninn á öðru sæti o.s.frv. Hér eftir verður rætt um númer tóna og sæti tónstigans jöfnum höndum.

2.2 Fimmundaspírallinn óendanlegi

Sé haldið áfram með sama hætti í báðar áttir bætist í hvert skipti við einn tónn á milli einhverra tveggja tóna sem fyrir voru. Þegar byggður er sams konar tónstigi út frá tóninum fimmund fyrir ofan tiltekinn upphafstón bætist við tónn á sjöunda sæti tónstigans og tíðni hans er örlítið nær tíðni tónsins á áttunda sæti tónstigans en þeim sem er á óbreyttu sjöunda sæti. Þegar farið er fimmund niður frá síðasta grunntóni bætist við tónn á fjórða sæti tónstigans sem er örlítið nær tóninum á þriðja sæti tónstigans en þeim á óbreyttu fjórða sæti. Þegar fundnir hafa verið tónstigarnir P^7 og P^{-7} með þessum hætti eru aðeins tveir tónar eftir úr upphaflega tónstiganum. P^7 er frá nóttunni Fís og P^{-7} er frá nóttunni Ges. Ef þessir tveir tónstigar eru bornir saman heyrir að allir tónar tónstigans P^7 eru af örlítið hærri tíðni en tónar tónstigans P^{-7} . Tónbilið milli grunntóns P^7 og P^{-7} er mjög þröngt. Það byggir á hlutfallinu $(3^6/2^9)/(2^{10}/3^6)$ og er kallað komma Pýþagórasar.¹⁹ Komma Pýþagórasar samsvarar 24 sentum.²⁰ Þetta hefur það í för með sér að hægt er að halda endalaust áfram að flytja tónstigann fimmund upp og fimmund niður og nýir tónar bætast við í hvert skipti.²¹ Þessu má líkja við óendanlegan spíral af fimmundum.

Tónfræðin sem við þekkjum í dag byggir hins vegar á lokuðum hring fimmunda. Hringurinn lokast þegar tónstiginn frá C er fluttur upp um fimmund í sjöunda skipti. Þegar farið er fimmund upp frá Fís er lent á Cís, en tónstigann frá Cís þekkjum við úr ferðalaginu niður fimmundirnar, því grunntónn fimmta tónstigans sem við finnum á þeirri leið er Des. Í lokaða hringnum hljóma Cís og Des eins. Þegar svo er farið fimmund niður frá Ges lendum við á Ces, en það er grunntónn

¹⁸ Sama rit, bls. 17-18.

¹⁹ Sama rit, bls. 18-19.

²⁰ Barbour, 2004, bls. ix.

²¹ Fauvel, 2003, bls. 18-19.

fimmta tónstigans sem við finnum á leiðinni upp fimmundirnar eða H. Að sama skapi hljóma H og Ces eins í lokaða hringnum og sé svo haldið áfram upp eða niður er alltaf lent á tóni sem áður hefur komið fyrir.

Í fimmundahringnum jafngilda tólf hreinar fimmundir sjö áttundum. Stærðfræðilega getur þetta ekki gengið upp ef hlutfallareikningum Pýþagórasar er fylgt.²² Til þess yrði að vera til lausn á eftirfarandi jöfnu:

$$(3/2)^p = 2^q \text{ eða } 3^p = 2^{p+q}$$

Með öðrum orðum yrði fimmundahlutfallið í einhverju veldi yrði að geta jafngilt áttundahlutfallinu í einhverju veldi. Það getur það hins vegar ekki því talan þrjár í einhverju veldi getur aldrei jafngilt tölunni tveimur í einhverju veldi.²³

Hér liggur beint við að spyrja hvernig þessi niðurstaða náðist í formúlu sem annars vegar gerði Pýþagóras kleift að skilgreina einhvers konar dúrtónstiga en virtist hins vegar bjóða upp á óendanlega möguleika þegar kom að því að flytja grunntóninn til? Hvernig tókst að loka hinum óendanlega spíral fimmunda og raða tóntegundunum í hring sem aðeins inniheldur tólf dúr tónstiga og hvers vegna var það gert?

Svo virðist sem þessi spíral hafi verið álitinn galli allt frá því hann var skilgreindur. Markmiðið að leiðrétta kommu Pýþagórasar og finna lokað kerfi sem gengi upp virðist hafa sprottið á sama tíma og fimmundaspíralinn var uppgötvaður.

3. Réttstillingin²⁴

Tónstigi Pýþagórasar inniheldur tónbil sem mörg hver byggja á nokkuð flóknum hlutföllum. Það sem verða átti einfalt kerfi af tónbilum sem byggðu á hlutföllum milli lágra, heilla talna varð töluvert flóknara en ætlað var í fyrstu. Til dæmis byggir stóra þrúndin á hlutfallinu 81/64, stóra sexundin á hlutfallinu 27/16 og litla tvíundin á 256/243 sem öll innihalda fremur háar tölur.²⁵

²² Fauvel, 2003, bls. 16.

²³ Sama rit, bls. 18.

²⁴ Á ensku just intonation.

²⁵ Fauvel, 2003, bls. 19.

Þó er vert að hafa í huga að tónbil voru aðallega notuð í lagrænu tilliti allt fram á endurreisnartímabilið, þ.e. birtust milli tveggja tóna sem hljómuðu hver á eftir öðrum fremur en milli tóna sem hljómuðu á sama tíma. Fjölradda tónlist tók hins vegar að þróast á síðmiðöldum. Þau tónbil sem fram að því höfðu talist hrein voru áttund, ferund og fimmund, en smám saman bættust þ ríund og sexund við í samhljóminn. Þessi þróun kallaði strax á hliðrun á stillingu Pýþagórasar þar sem þríundin og sexundin yrðu örlítið þrengri.²⁶ Þríundin í stillingu Pýþagórasar var strekktari en þ ríund yfirtónaraðarinnar og munar þ ar kommu Pýþagórasar eða u.þ.b. 1/9 tóni.²⁷ Til þess að gera þríund og sexund tónstiga Pýþagórasar ómblíðari var þ ríundarhlutfallinu breytt úr 81/64 í 80/64 en það brot er fullstýtt 5/4. Sexundarhlutfallinu var svo breytt úr 27/16 í 25/15 en það brot er fullstýtt 5/3. Tónstiginn sem settur var saman úr þessum niðurstöðum hefur verið nefndur réttstilling.²⁸

Engar heimildir hafa varðveist um þær tilraunir sem leiddu til þessara niðurstaðna um einföldun þríundahlutfallanna.²⁹ Þó er ljóst að eftirspurnin eftir fleiri ómblíðum tónbilum en áttund, fimmund og ferund hefur aukist með þróun fjölraddatónlistar. Fram að því höfðu þríundir og sexundir verið álitnar ófullkomnar ómblíður og má eflaust rekja það viðhorf beint til stillingar Pýþagórasar þar sem þríundirnar hljómuðu heldur strekktar. Þó liggja þær kenningar eftir Englendinginn Walter Odyngton, tónfræðing og vísindamaður sem uppi var snemma á fjórtánda öld,³⁰ að söngvurum væri eiginlegt að syngja ómblíðar þríundir með hlutföllunum 5/4 og 6/5. Um leið hélt hann þ ví fram að þeim væri alls ekki eiginlegt að syngja þríundirnar eins og þær birtust í tónstiga Pýþagórasar.³¹ Þessar kenningar kynnti hann í riti sínu *Summa de speculatione musicae*.³²

²⁶ Fauvel, 2003, bls. 20.

²⁷ Barbour, 2004, bls. 1.

²⁸ Fauvel, 2003, bls. 19.

²⁹ Barbour, 2004, bls. 4.

³⁰ Hammond, Frederick og Lefferts, Peter M., „Odyngton, Walter [Walter Evesham; frater Walterus Odyngton monachus de Evesham]“, *Grove Music*, Oxford University Press, Oxford 2007-2011. Heimasíða Grove Music, 2007-2011, sótt 3.2.2011, <<http://www.oxfordmusiconline.com>>.

³¹ Barbour, 2004, bls. 3.

³² Hammond, Frederick og Lefferts, Peter M., „Odyngton, Walter [Walter Evesham; frater Walterus Odyngton monachus de Evesham]“, *Grove Music*, Oxford University Press, Oxford 2007-2011. Heimasíða Grove Music, 2007-2011, sótt 3.2.2011, <<http://www.oxfordmusiconline.com>>.

Það vill svo til að hlutföllin sem birtast í réttstillta tónstiganum samræmast náttúrulegu yfirtónaröðinni³³ og í ljósi þeirrar staðreyndar að mannseyrað skynjar yfirtónana um leið og það nemur hljóð ætti samhljómur þeirra ekki að vera framandi. Þar með eiga kenningar Odingtons við rök að styðjast.

3.1 Samanburður á tónstiga Pýþagórasar og réttstilltum tónstiga

Á sextánda öld voru margar tilraunir gerðar til þess að gera þríund og sexund tónstiga Pýþagórasar ómblíðari. Sú niðurstaða sem mest áhrif hafði var niðurstaða Giuseppe Zarlinos, kórstjóra Markúsarkirkjunnar í Feneyjum. Hann gaf út ritið *Institutioni harmoniche* árið 1558 og kynnti þar þessa óhefðbundnu leið til að stilla dúrtónstigann af. Hann notfærði sér sömu hlutföll og Pýþagóras til að stilla áttund, fimmund og ferund. Hins vegar einfaldaði hann sambandið milli fimmundar, þríundar og grunntóns, þ.e. 5/4 fyrir stóru þríundina og 6/5 fyrir litlu þríundina.

Tónstigin var á þessa leið:

Tónn	C	D	E	F
Tíðni	1/1	9/8	5/4	4/3
Tónbil	9/8	10/9	16/15	9/8

Tónn	G	A	H	C'
Tíðni	3/2	5/3	15/8	2/1
Tónbil	10/9	9/8	16/15 ³⁴	

Hér birtast enn ný tónbil. Tónbilin milli C og D, F og G og A og H eru eins og í tónstiga Pýþagórasar. Hins vegar eru tónbilin milli D og E og G og A þrengri, þ.e. 10/9. Hlutfallið milli þessarra tónbila er $9/8:10/9=81/80$ eða $3^4/(2^4 \times 5)=1,0125$ ³⁵ sem samsvarar um það bil 22 sentum³⁶ og nefnist sintónísk komma.³⁷ Þar með eru heiltónsbilin ekki öll jafn stór.

³³ Fauvel, 2003, bls. 21.

³⁴ Sama rit, bls. 21.

³⁵ Sama rit, bls. 21.

³⁶ Barbour, 2004, bls. xii.

3.2 Tónflutningur réttstillta tónstigans

Þegar svo kemur að tónflutningi réttstillta tónstigans blasir jafnvel enn stærra vandamál við en þegar tónstigi Pýþagórasar er tónfluttur. Þegar tónflutt er upp um fimmund eru nú tveir tónar sem þarfnast leiðréttingar svo nýi tónstíginn hljómi eins og upprunalegi tónstíginn. Tónflutningur frá H upp á Fís gengur fyrir sig eins og áður en þegar kemur að D flyst það upp á A sem er 27/16 í stað þess að vera 5/3. Tónbilið G-A var þrengd tvíund í tónstiganum frá C en verður víð tvíund í tónstiganum frá D og munar þar áður nefndri sintónískri kommu.³⁸

Þetta gerði tónflutning á hljómborðshljóðfærum sérlega erfiðan. Stærðfræðingurinn Marin Mersenne rannsakaði þetta vandamál á 17. öld og kynnti til sögunnar þrjátíu og eins tóns hljómborð í ritinu *Harmonie universelle* (1636-1637). Tónsvið þess var ein áttund sem innihélt þrjátíu og einn tón og á milli F og G voru hvorki meira né minna en fjórar nótur. Svona hljómborð voru smíðuð og vitað er til þess að tónskáldið Georg Friedrich Haendel hafi spilað á eitt slíkt í Niðurlöndum.³⁹

Dæmið varð þó flóknara eftir því sem oftast var tónflutt. Margar tilraunir voru gerðar til þess að yfirstíga vandamál réttstillingar Zarlinos. Meðal annarra reyndi Isaac Newton að finna bestu hlutföllin með því að gera tónstígann samhverfan og nota D sem upphafspunkt. Þetta hljómaði ágætlega í tónstígum nálægt C en hljómaði verr eftir því sem fjær var komið frá C.⁴⁰

4. Jafnstillingin

Í byrjun 18. aldar jukust kröfur um að gera ótakmarkaðan tónflutning á hljómborðinu mögulegan án þess að nokkur tóntegund hljómaði „verri“ eða vanstilltari en önnur. Hugmyndir á borð við þessar höfðu komið fram löngu fyrr, t.d. lagði Vincenzo Galilei fram þá hugmynd í ritinu *Dialogo della musica antica e moderna* árið 1581 að tólf tóna tónstiganum yrði skipt upp í jafna hálfstóna með hlutfallinu 18/17. Sé þetta brot sett í 12 veldi fæst niðurstaðan 1,98555... sem er aðeins minna en 2 og sé það sett í 7. veldi fæst niðurstaðan 1,4919 sem er aðeins

³⁷ Á ensku syntonic comma.

³⁸ Fauvel, 2003 bls. 22.

³⁹ Sama rit, bls. 22-23.

⁴⁰ Sama rit, bls. 23.

minna en $3/2$. Þetta gefur því helst til þröngar áttundir og fimmundir, sem var óheppilegt í ljósi þess að áttundin og fimmundin eru grundvallartónbil í hverjum tónstiga.⁴¹

Þessi niðurstaða er þó ekki langt frá þeirri sem stærðfræðingurinn Simon Stevin (1548-1620) komst að. Hann lagði fram þá hugmynd að láta hálfþónsbilið samsvara $2^{1/12}$ og halda þá ar með hlutfalli áttundarinnar $2/1$. Þetta gefur örlítið þrengda fimmund, en þó ekki eins þrengda og fimmund Vincenzo Galilei reyndist vera. Talan $2^{1/12}$ er óræð tala og ekki hægt að setja hana fram sem almennt brot. Að auki eru veldi hennar fram til þess tólfta öll óræðar tölur. Frá stærðfræðilegu stjórnarhorni er þessi niðurstaða kaldhæðnisleg í ljósi þess að fyrstu rannsóknir á æskilegum hlutföllum ómblíðra tónbila leiddu til þeirrar niðurstöðu að hlutföll milli tónanna skyldu byggja á ræðum tölum. Þó er talan $2^{7/12}$ svo góð nálgun við $3/2$ að munurinn er vart greinanlegur þegar um er að ræða hljóð, sem réttlætir notkun þess.⁴²

Fyrir eyru sem hafa lagað sig að réttstillingu hljómar stóra þríundin í jafnstillingunni þó nokkuð strekkt og hin einstaka ómblíða þríhljóms réttstillingarinnar er úr sögunni þegar notast er við þessa stillingu.⁴³

4.1 Tónflutningur jafnstilla tónstigans

Þegar jafnstillti tónstiginn er fluttur til með sama hætti og tónstigi Pýþagórasar hér á undan verður tíðni nýju tónanna sem myndast í hvert skipti, mitt á milli tíðni tónanna sitt hvoru megin við þá. Þegar Fís myndast í tónstiganum frá G verður tíðni Fís mitt á milli tíðni F og G. Það sama gerist þegar B myndast í tónstiganum frá F, tíðni tónsins B verður mitt á milli tíðni tónanna A og H. Nýju tónarnir marka því samhverfuás milli tónanna sitt hvoru megin við þá.⁴⁴

Þetta leiðir til þeirrar niðurstöðu að jafnstilltur tónstigi frá Fís og frá Ges hljómar eins og því er ekki lengur um spíral fimmunda að ræða heldur lokaðan hring fimmunda sem inniheldur 12 jafnstilla dúrtónstiga og 12 jafnstilla molltónstiga. Fimmundahringurinn hefur verið grundvöllur vestrænnar tónfræði fram til dagsins

⁴¹ Sama rit, bls. 24-25.

⁴² Sama rit, bls. 25.

⁴³ Sama rit, bls. 25.

⁴⁴ Sama rit, bls. 26.

í dag. Kostir jafnstillingarinnar eru helst fólgnir í þeirri einföldun sem á sér stað með því að tónar krómátíska tónstigans innan einnar áttundar eru aðeins 12 og tónflutningur er með öllu vandkvæðalaus.⁴⁵

Þróun og framkvæmd jafnstillingarinnar var þó lengra og flóknara ferli en hér er lýst. Margt bendir til þess að einhvers konar jafnstilling hafi verið notuð á Englandi á síðari hluta 16. aldar. T.d. er í verkum tónskálda á borð við John Bull móðúlerað svo langt frá C að einhvers konar jafnstilling hlýtur að hafa verið notuð. Þrátt fyrir það var jafnstillingin ekki enn komin í almenna notkun um miðja 19. öld og þar sker England sig úr. Á heimssýningunni árið 1851 var ekki eitt einasta orgel frá Englandi stillt með þessari aðferð. Það er þó ljóst að notkun hennar jókst jafnt og þétt frá fyrri hluta 18. aldar. Þá eru *Ariadne musica* frá 1702 eftir Fischer örverk sem ferðast um 19 tóntegundir af 24 og *Vel stillta píanóið* eftir J. S. Bach inniheldur prelúdíu og fúgu í öllum tóntegundum fimmundahringsins. Þó er að vísu sannað að Bach hafi ekki notast við jafnstillingu í nútímaskilningi.⁴⁶

Á sama tíma skutu þó ýmsar óreglulegar stillingar upp kollinum, t.d. Kirnberger III aðferðin sem hafði fjóra réttstillta tóna, þrjá meðaltóna, jafnstilla fimmund, níu mismunandi stilltar litlar tvíundir og aðeins fjórar stórar tvíundir.⁴⁷

Hugmyndin um ómblíðu er upprunalega tengd hlutföllum sammælanlegra talna, sem var grundvallarhugtak í grískri stærðfræði. Mannseyrað skynjar ómblíðu þegar hlutfall milli tíðni tveggja tóna byggir á sammælanlegum tölum. Grikkirnir töldu ósammælanlegar tölur hafa aðra verufræðilega stöðu, þ.e. ekki vera jafn raunverulegar og sammælanlegar tölur.⁴⁸ Ljóst er að ómblíða er að einhverju leyti menningarlegt fyrirbæri, en það er eftir sem áður staðreynd að þegar hlutfall milli tíðni tveggja tóna er einfalt skapast minni árekstur milli hljóðbylgna en ella.

Svo virðist sem það séu fyrst og fremst tveir þættir sem togast á í umræðunni um stillingar, þ.e. áherslan á ómblíðuna og svo áherslan á tónflutninginn. Tónflutningurinn hefur líklega þá á eins og nú gegnt tvíþættu hlutverki. Annars vegar að laga tóntegund t.d. að raddlegu söngvara eða tónsviði ákveðins hljóðfæris

⁴⁵ Sama rit, bls. 26.

⁴⁶ Sama rit, bls. 27.

⁴⁷ Sama rit, bls. 27.

⁴⁸ Sama rit, bls. 27.

og hins vegar að ferðast milli tóntegunda í tungumáli vestrænnar tónlistar sem er tónalckerfið.

Segja má að með jafnstillingunni hafi óræðar tölur komið til bjargar við leitina að stillingu sem sameinaði þessa tvo þætti á viðunandi hátt vegna aðlögunarhæfni mannseyrans og getu þess til að námunda að réttri tíðni.⁴⁹

4.2 Samanburður jafnstillingar við yfirtónaröð og réttstillingu

Tónbil réttstillta tónstigans samanstanda af hlutföllum milli lágra, heilla talna. Eina „rétt“ tónbilið úr jafnstillingunni er áttundin. (Hlutföll milli lágra, heilla talna eru almennt kölluð „rétt“ tónbil⁵⁰). Samsetning tónstiga sem byggður er á hlutföllum milli lágra, heilla talna byggir á ævafornum grunni, en jafnstillti tónstigin er tiltölulega ný uppfinning.

Yfirtónaröðin var lítillga kynnt til sögunnar í kafla 1.2 og nú verður nánar litið á hana. Myndin sem hér að neðan sýnir fyrstu sextán yfirtónana á nótnastreng.



Mynd 2: Yfirtónaröðin⁵¹

Tölurnar milli nótnastrengjanna tákna númer yfirtónanna en tölurnar fyrir neðan neðri strenginn sýna hve miklu munar í sentum á tíðni viðkomandi tóns í jafnstillingu. Þriðji yfirtónn sem samsvarar hreinni fimmund er tveimur sentum hærri í yfirtónaröðinni en í jafnstilltum tónstiga, fimmti yfirtónn eða stór þríund, er fjórtán sentum lægri o.s.frv.

⁴⁹ Fauvel, 2003, bls. 27.

⁵⁰ Á ensku just intervals.

⁵¹ Joutsenvirta, Aarre, *The Basics of Acoustics*, 2005. Heimasíða Síbelíusarakademíunnar, 24. 2.2009, sótt 31.1.2011, <<http://www.siba.fi/fi/>>.

Öll grundvallartónbil vestrænnar fjölraddatónlistar, þ.e. hreina áttundin, hreina fimmundin, hreina ferundin, stóra þríundin og litla þríundin birtast milli fyrstu sex yfirtónanna. Þá er stóru sexundina að finna milli þriðja og fimmta yfirtóns og svo litlu sexundina milli fimmta og áttunda yfirtóns. Eins og sjá má af myndinni er ekkert þessara tónbila utan áttundarinnar laust við bjögun í jafnri stillingu.

Menn hafa deilt um hvort díatóníski dúrtónstiginn sé upprunninn í náttúrulegu yfirtónaröðinni og hann eigi þar með uppruna sinn í hlutföllum sem lúta náttúrulegumálum. Þar með hafi markmið tónfræðinga til forna verið að hanna tónstiga úr þessum hlutföllum. Sú hugmynd er á öndverðum meiði við þá söguskoðun að fyrsta díatóníska tónstigann megi rekja til Pýþagórasar og hans fylgismanna. Bandaríska tónskáldið og tónfræðingurinn Harry Partch heldur því aftur á móti fram í bók sinni *Genesis of a Music* frá 1947 að það hvort tónn tilheyri yfirtónaröðinni eða ekki skipti engu máli í sjálfu sér. Eyrað hafi þann hæfileika að skynja hlutföll milli lágra, heilla talna sem ómblíðu og þá skipti ekki máli hvort tónbilin séu upprunnin í yfirtónaröðinni eða ekki.⁵² Harry Partch hafnaði jafnstillingu á þeirri forsendu að hún næði engan veginn að fullnægja eðlilegum kröfum um ómblíðu og helgaði líf sitt því að smíða hljóðfæri í alls kyns óhefðbundnum stillingum með miklu fleiri tóna innan áttundar en tólf.⁵³

4.3 Jafnstillingin í sögulegu samhengi

Þótt vitað sé að hljómborðstónlistarmenn endurreisnartímans hafi ekki samþykkt jafnstillinguna virðist hún hafa verið notuð í einhverri mynd á gripluð strengjahljóðfæri sbr. lútu og víólu að minnsta kosti frá upphafi 16. aldar.⁵⁴

Nokkrar heimildir eru til um kenningar sem settar voru fram um stillingar fyrir árið 1500. Næsti lykilmaður í sögu stillinganna á eftir Pýþagóراسi er Aristóxenes, en hann setti fram þá kenningu að eyrað hefði úrslitaáhrif þegar kæmi að stillingu og niðurstaða þess vægi þyngra en stærðfræðileg hlutföll. Einn tónstiga Aristóxenesar innihélt jafnstór skref, heil og hálf. Tónfræðingar 16. aldar töldu hann því hafa uppgötvað jafnstillinguna fyrstur manna. Þó er líklegt að hann hafi ætlað

⁵² Loy, Gareth, 2006, bls. 42.

⁵³ Kassel, Richard: „Partch, Harry“, *Grove Music*, Oxford University Press, 2007-2011.

Heimasíða Grove Music, 2011-2011, sótt 17.1.2011, <<http://www.oxfordmusiconline.com>>.

⁵⁴ Lindley, Mark, „Temperaments“, *Grove Music*, Oxford University Press, Oxford 2007-2011. Heimasíða Grove Music, 2007-2011, sótt 27.9.2010, <<http://www.oxfordmusiconline.com>>.

kenningum sínum að gagnast stillingu Pýþagórasar frekar en að andmæla notkun hennar, því flestir aðrir tónstigar sem hann kynnti til sögunnar voru mjög áþekkir þeim sem þekktust á hans samtíma. Fyrst og fremst andmælti hann þeirri miklu trú sem samtímamenn hans höfðu á stærðfræðileg hlutföll í þessu samhengi.⁵⁵

Landfræðingurinn Ptólemeus sameinaði svo þessi tvö sjónarmið. Besta mögulega stillingaraðferðin yrði fundin með þ því að miðla málum milli stærðfræðilegra hlutfalla og skynjunar eyrans. Hlutföllin skyldu ekki hunsuð þótt skynjuninni yrði veitt meira vægi.⁵⁶

Jarðvegurinn fyrir jafnstillinguna hafði því verið plægður á tímum Pýþagórasar en uppskeran lét á sér standa enn um sinn.

Fyrstur til þess að skilgreina hvernig hægt væri að framkvæma jafnstillingu var spænski tónfræðingurinn Francisco Salinas (1513-1590).⁵⁷ Hann segir í riti sínu *De musica libri VII* að áttundinni skyldi deilt í tólf jafna hluta. Þrátt fyrir að aðferðin til að reikna út hvernig hún skyldi framkvæmd hafi ekki verið ýkja flókin, gaf Salinas þó engin fyrirmæli um það.⁵⁸ Elstu rituðu heimildir um aðferð til þess að reikna það út, þ.e. með því að taka tólftu rótina af tveimur (því 2/1 er hlutfall áttundarinnar), eru frá Kína. Það var prinsinn Zhu Zaiyu sem setti þessa útreikninga fram árið 1581.⁵⁹ Ástæða þess að aðferða til að framkvæma jafnstillingu á tólf tóna krómatískum tónstiga var leitað í Kína er þó ráðgáta, því kínversk tónlist hafði engin not fyrir slíka stillingu.⁶⁰

Hlutfallið 18/17 sem er svipað og Vincenzo Galilei kynnti til sögunnar vel fyrir endurreisnartímamann samsvarar stærðfræðilega 99 senta hálfþóni. Það er illgreinanlegt frá 100 senta hálfþóni jafnstillingarinnar. Þess vegna náðu fræðilegar leiðréttingar Zarlinos frá 1588 og Stevins frá því um 1600 ekki raunverulegri fótfestu og höfðu ekki teljandi áhrif á þ roun jafnstillingarinnar þ því hún var framkvæmanleg áður en hún var fræðilega skilgreind. Tónsmíðar á borð við *Quid*

⁵⁵ Barbour, 2004, bls. 1-2.

⁵⁶ Sama rit, bls. 2.

⁵⁷ Palisca, Claude V., „Salinas, Francisco [Franciscus] de“, *Grove Music*, Oxford University Press, Oxford 2007-2011. Heimasíða Grove Music, 2007-2011, sótt 9.2.2011, <<http://www.oxfordmusiconline.com>>.

⁵⁸ Barbour, 2004, bls. 6-7.

⁵⁹ Donahue, Thomas, *A Guide to Musical Temperament*, The Scarecrow Press, Inc., Oxford, 2005, bls. 113.

⁶⁰ Barbour, 2004, bls. 7.

non ebrietas eftir Adrian Willaert sem gefið var út árið 1530 og tónverk Francescos Orsos frá 1567 við *Il cantar nuovo* eftir Petrarca benda til þess að einhver 16. aldar tónskáld hafi heillast af enharmónískum kostum jafnstillingarinnar, sem talsmenn hennar höfðu alltaf bent á.⁶¹

Árið 1603 sakaði G. M. Artusi ónafngreindann andstæðing sinn – sem síðar kom í ljós að var Claudio Monteverdi – um nútímalega tilhneigingu til að nota hlutföll sem nálguðust jafnstillingu og réttlættu þar með notkun þrengra ferunda og sjöunda í söngtónlist.⁶² Jafnstillingunni var því andmælt á ýmsum forsendum.

Segja má að saga jafnstillingarinnar lýsi mótun hennar og slípun frá því fyrstu hljómborðstónlistarmennirnir samþykktu hana undir lok fjórða áratugar sextándu aldar þegar ítalska tónskáldið Girolamo Frescobaldi (1583-1643)⁶³ viðurkenndi hana og fram til áttunda áratugar nítjándu aldar þegar hún taldist almenn eftir að enskir orgelstillingamenn létu að lokum sannfærast um ágæti hennar⁶⁴

Árið 1588 rakti Zarlino eftirfarandi ummæli til Girolamo Roselli, ábóta í San Martino klaustrinu á Sikiley:

Þessi aðferð, að skipta áttundinni í 12 jafna hluta [...] gæti leyst öll vandamál söngvara, hljóðfæraleikara og tónskálda með því að þjálf þá almennt [...] í að syngja eða spila [...] do, re, mi, fa, so, la frá öllum tónunum 12 sem hefði í för með sér, eins og hann [Roselli] segir, hring tónlistar. Þar með gætu öll hljóðfæri haldið stillingunni, hljómað vel saman og orgel yrðu samkvæmt honum hvorki of há né of lág í tónhæð.⁶⁵

Svo bar til um fimmtíu árum síðar að gamall maður sem hafði eytt stærstum hluta ævinnar á Sikiley og í Kalabríu og kunnir fátt annað en að spila á sembal, settist í helgan stein og kom til Rómar. Honum tókst að sannfæra Frescobaldi um gagnsemi jafnstillingar fyrir sembal og Frescobaldi mælti í kjölfarið með því að orgelið í San Lorenzo í Damaso yrði jafnstíllt. Smáatriði þessarar sögu eru rakin til bókar og bréfaskrifta tónfræðingsins G. B. Doni frá 1647, en hann hvatti

⁶¹ Lindley, Mark, „Temperaments“, *Grove Music*, Oxford University Press, Oxford 2007-2011. Heimasíða Grove Music, 2007-2011, sótt 27.9.2010, <<http://www.oxfordmusiconline.com>>.

⁶² Lindley, Mark, „Temperaments“, *Grove Music*, Oxford University Press, Oxford 2007-2011. Heimasíða Grove Music, 2007-2011, sótt 27.9.2010, <<http://www.oxfordmusiconline.com>>.

⁶³ Donahue, 2005, bls. 113.

⁶⁴ Lindley, Mark, „Temperaments“, *Grove Music*, Oxford University Press, Oxford 2007-2011. Heimasíða Grove Music, 2007-2011, sótt 27.9.2010, <<http://www.oxfordmusiconline.com>>.

⁶⁵ Zarlino, Giuseppe: *Dimostrazione armoniche*, Feneyjum, 1588. Fengið úr Lindley, Mark, „Temperaments“, *Grove Music*, Oxford University Press, Oxford 2007-2011. Heimasíða Grove Music, 2007-2011, sótt 27.9.2010, <<http://www.oxfordmusiconline.com>>.

kardínálann Francesco Barberini til þess að hunsa þessa hugmynd Frescobaldis. Árið 1638 skrifaði hann svo í bréfi til Mersenne að Frescobaldi greindi ekki mun á dúr og moll hálfþónum, en vísbendingar eru um að Frescobaldi hafi haft frjálst viðhorf til ítónunar. Tónskáldið Johann Jacob Froberger (1616-1667)⁶⁶ var nemandi Frescobaldis þegar Sikileyngurinn kom til Rómar og er talinn hafa notast við jafnstillingu á hljómborðshljóðfæri síðan.⁶⁷

Jafnstillingin var þó ví alls ekki samþykkt um leið og hún tók að þróast. Ýmis ummæli voru látin falla, t.d. var því haldið fram árið 1732 að fæstir fyndu í þessari stillingu það sem þeir leituðu að. Hana skorti fjölbreytni í hljómi stóru þríundanna og þar af leiðandi aukna tilfinningu. Í þríhljómnnum hljómaði allt nógu illa til þess að eyrað námunnaði að réttum tónum, en ef þríundirnar voru spilaðar hvor á eftir annari hljómaði stóra þríundin alltof strekkt og litla þríundin alltof þröng.⁶⁸

Um þetta leyti þróuðust af þessum sökum ýmsar óreglulegar stillingaraðferðir sem ekki gefst ráðrúm til að tunda frekar hér. Sú mikilvægasta af þeim er meðaltóna stillingin⁶⁹.

Þrátt fyrir allt jókst áhugi þýskra fræðimanna á jafnstillingu í lok 18. aldar og smátt og smátt breiddist hann út til Englands. Það kom líklega til af því að menn áttuðu sig á að ekki væri lengur óhugsandi að stilla orgel í jafnri stillingu, en fram til þessa hafði jafnstillingin verið eyrnamerkt gripluðum strengjahljóðfærum.

Upphaf sigurfara jafnstillingarinnar er oft tengt tveimur nöfnum, þ.e. þýska tónfræðingsins Werckmeisters og enska tónskáldsins John Bull. Werckmeister hafði tekið saman rit um allar mögulegar hljóðfærastillingar og viljandi skilið jafnstillinguna eftir í þeirri umfangsri sökum andstöðu sinnar við hana. Síðar tók hann niðurstöður fyrri rannsókna sinna saman í bók sem gefin var út árið 1707

⁶⁶ Donahue, 2005, bls. 113.

⁶⁷ Lindley, Mark, „Temperaments“, *Grove Music*, Oxford University Press, Oxford 2007-2011. Heimasíða Grove Music, 2007-2011, sótt 27.9.2010, <<http://www.oxfordmusiconline.com>>.

⁶⁸ Lindley, Mark, „Temperaments“, *Grove Music*, Oxford University Press, Oxford 2007-2011. Heimasíða Grove Music, 2007-2011, sótt 27.9.2010, <<http://www.oxfordmusiconline.com>>.

⁶⁹ Á ensku mean tone temperament.

skömmu eftir að hann lést og baðst þar afsökunar á því að hafa ekki kynnt jafnstillinguna í fyrri ritum sínum um stilingaraðferðir.⁷⁰

Eftir John Bull liggur verkið *Ut-re-mi-fa-sol-la* í bókinni *Fitzwilliam Virginal*. Þetta verk notar allar fimm hækkuðu nóturnar í sumum hlutum verksins og allar fimm lækkuðu nóturnar í öðrum, en aldrei bæði hækkaðar og lækkaðar nótur í sömu hlutum. Verkið hefur líklega verið hugsað fyrir sembal.⁷¹

Það sem helst gerði menn andsnúna jafnstillingunni var að hún gekk út á að „blekkja tóneyrað“. Bjögurinn í henni er þó í flestum tilfellum svo lítil að eyrað „námundar“ tónbilið sem það heyrir að réttu tónbili. Það má því kalla hana eins konar málamiðlunaraðferð. Þetta fór illa í marga og því var jafnvel haldið fram að ekkert gæti réttlætt notkun slíkrar stillingar.

Í Frakklandi var helsti talsmaður jafnstillingarinnar franskur tónfræðingurinn Jean Philippe Rameau. Í riti sínu *Génération harmonique* frá 1737 samþykkti hann jafnstillinguna og færði einnig fyrir henni ný rök.

Sá sem trúir því að hin ólíku áhrif sem hann verður fyrir sökum þess með hve ólíkum hætti tóntegundirnar hljóma í þeim stillingum sem notaðar eru í dag séu til þess fallin að bæta tónlistina og auka fjölbreytni hennar þarf að setta sig við að ég segi hann hafa rangt fyrir sér. Tilfinningin fyrir fjölbreytni orsakast af innra sambandi tóntegundanna en ekki því hvernig tónbilin breytast við tónfluttning og gera þá fátt annað en ergja eyrað og afvegaleiða það.⁷²

Röksemd Rameaus gæti hafa verið þó nokkuð róttækari í Frakklandi en í Þýskalandi því eiginleikar óreglulegu stillinganna virðast jafnvel hafa verið meira áberandi í Frakklandi en í Þýskalandi. Rameau hafði þó áunnið sér slíka virðingu sem tónlistarmaður að árið 1749 var eftirfarandi fullyrðing sett fram í riti frá Paris Académie Royale:

⁷⁰ Lindley, Mark, „Temperaments“, *Grove Music*, Oxford University Press, Oxford 2007-2011. Heimasíða Grove Music, 2007-2011, sótt 27.9.2010, <<http://www.oxfordmusiconline.com>>.

⁷¹ Lindley, Mark, „Temperaments“, *Grove Music*, Oxford University Press, Oxford 2007-2011. Heimasíða Grove Music, 2007-2011, sótt 27.9.2010, <<http://www.oxfordmusiconline.com>>.

⁷² Rameau, Jean Philippe, *Génération harmonique*, 1737, fengið úr Lindley, Mark, „Temperaments“, *Grove Music*, Oxford University Press, Oxford 2007-2011. Heimasíða Grove Music, 2007-2011, sótt 27.9.2010, <<http://www.oxfordmusiconline.com>>.

Herra Rameu fullvissar okkur um að stillingin sem hann kynnir muni ekki draga úr áhrifamætti tónlistarinnar. Hvað þetta varðar hefur hann áunnið sér traust til þess að orð hans séu tekin gild.⁷³

Jafnstillingin var því tengd nafni hans alla 18. öldina í Frakklandi og stundum einnig á Ítalíu.⁷⁴

Sá sem mest áhrif hafði í rökræðunum um stillingarnar var þó líklega þýski tónfræðingurinn F. W. Marpur. Hann færði rök fyrir styrkleikum jafnstillingarinnar í tveimur ritum, *Versuch über die musikalische Temperatur* sem kom út árið 1776 og *Principes du clavecin* sem kom út árið 1756. Hann tundaði með töluvert nákvæmari hætti en Rameu þá kosti sem jafnstillingin hafði umfram aðrar stillingar og færði fyrir þeim rök sem á þessum tíma þóttu standa svo styrkum fótum að á 19. öld varð jafnstillingin almenn fyrir hljómborðshljóðfæri og í kjölfarið varð hún grunnviðmið fyrir ítónun á önnur hljóðfæri.⁷⁵

Þegar hér er komið sögu má velta fyrir sér hver árangurinn af þessu ferðalagi var. Ljóst er að jafnstillingin náði gríðarlegum yfirburðum og telst enn þann dag í dag vera grunnviðmið í ítónun. Öll tónlist er nú almennt flutt í jafnri stillingu, hvort sem hún er frá þó ví fyrir daga jafnstillingarinnar eða ekki og þannig vill hinn almenni vestræni áheyrandi hafa hana. Hún hefur náð svo mikilli yfirburðarstöðu að margir vestrænir tónlistarmenn eru ómeðvitaðir um aðrar stillingaraðferðir. Það kann að skýrast að mestu leyti af því að flest kennslurit um hljómfærni og tónfræði miða við jafnstillingtan tólf tóna krómátískan tónstiga.⁷⁶

Þetta u.þ.b. 150 ára gamla kerfi hefur smurst ofan á og litað sér eldri og sér yngri tónlist. Merkilegt er þó til þess að hugsa að innan við hundrað árum eftir að það náði almennri viðurkenningu leið tónalikerfið undir lok í klassískri tónlist. Það hélt þó gildi sínu í öðrum tónlistarstefnum í hinum vestræna heimi. Jafnstillingin, sem virðist hafa verið „draumur“ tónalakerfisins, gekk hugsanlega að þó ví dauðu.

⁷³ Extraits des registres de l'Académie royale des sciences frá 10. desember 1749, fengið úr Lindley, Mark, „Temperaments“, *Grove Music*, Oxford University Press, Oxford 2007-2011. Heimasíða Grove Music, 2007-2011, sótt 27.9.2010, <<http://www.oxfordmusiconline.com>>.

⁷⁴ Lindley, Mark, „Temperaments“, *Grove Music*, Oxford University Press, Oxford 2007-2011. Heimasíða Grove Music, 2007-2011, sótt 27.9.2010, <<http://www.oxfordmusiconline.com>>.

⁷⁵ Lindley, Mark, „Temperaments“, *Grove Music*, Oxford University Press, Oxford 2007-2011. Heimasíða Grove Music, 2007-2011, sótt 27.9.2010, <<http://www.oxfordmusiconline.com>>.

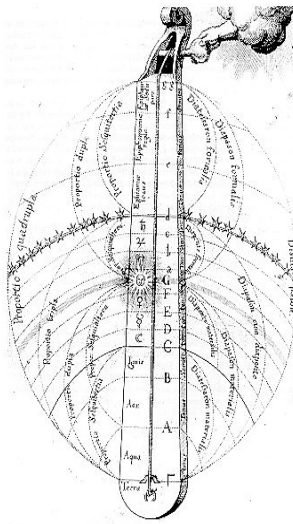
⁷⁶ Sethares, 2005, bls. 51.

Tónskáld 19. aldarinnar toguðu tónalckerfið og teygðu til hins ítrasta þar til hrikki mjög í stoðum þess uns það var á endanum lagt til hliðar.

4.4 Uppruni tónstigans og þörfin fyrir jafnstillingu

Elstu vestrænu rannsóknir sem vitað er til þess að gerðar hafi verið á tónstigum voru gerðar af Pýþagóراسi og hans fylgismönnum u.þ.b. 580-500 f. Kr. Vitað er að þeir litu á tónlist sem hluta vísindanna og trúðu því að samsetning tónstiga ætti að stafa frá hliðstæðu ferli og sýndi t.d. fram á samræmi milli reglubundinna hreyfinga hljóðfærastrengs og svo reglubundinna hreyfinga plánetanna. Þeim þótti fjarlægðin milli hljómandi hluta hljóðfærastrengs vega jafn þungt og fjarlægðin milli plánetanna í rannsóknum sínum á hlutföllum og stærðum.⁷⁷

Þessi mynd sýnir túlkun Roberts Fludds, samtímamanns Johannesar Keplers, á sambandi fjarlægða himinhvolfsins og skiptingu strengsins.



Mynd 3: Robert Fludd: „Samhljómur himinhvolfsins“⁷⁸

Pýþagóراس áleit með sama hætti og Partch að tónstigi yrði að byggja á hagstæðum hlutföllum milli tveggja tóna, þ.e. hvernig tónarnir dreifast á strenginn, en ekki eðlisfræðilegum hlut eins og yfirtónaröðinni. Út frá þessum sjónarmiðum má draga þá ályktun að uppruna tónstiganna sé að finna í stærðfræðilegum hlutföllum. Það leiðir líkum að því að tónstigar séu fundnir upp af mönnum og byggi á hlutföllum

⁷⁷ Loy, 2006, bls. 47.

⁷⁸ Fludd, Robert, *The Cosmic Monochord*. Heimasíða Middle Tennessee State University, 2011, sótt 31. janúar 2011 <<http://www.mtsu.edu/>>.

og stærðum. Samkvæmt því eru tónstigar eins og platónsk frummynd og hljóðfæri vanmáttug mennsk tilraun til þess að nálgast hana.⁷⁹

Vissulega er hér um ágiskanir að ræða. Sannleikurinn um uppruna tónstiganna hefur glatast með öllu. Það hvort tónstigarnir eigi sér uppruna í yfirtónaröðinni eða stærðfræðilegum hlutföllum og það hvort eyrað hafi raunverulega getu til þess að bera kennsl á tíðnihlutföll sem byggja á lágum, heilum tölum eða yfirtóna er óljóst. Hins vegar er margt sem rennir stoðum undir bæði þessi sjónarmið. Það er ljóst að tónstigarnir eru manngerðir því þeir heyrast ekki í náttúrunni og einnig að þeir falla í meginatriðum að náttúrulegu yfirtónaröðinni.⁸⁰

Tónstigar eru eins og safn valinna tónhæða. Í framvindu tónverks birtist tónar sem síendurtekið eru veiddir úr safninu. Sé horft til þess að allar hugsanlegar tónhæðir standi til boða þegar valið er í safnið, þá er það í raun mjög lítið. Þótt til dæmis séu til tónstigar með 22 tóna, upprunnir frá Arabíu, Tyrklandi og Indlandi, eru þeir langt frá því að innihalda allar mögulegar tónhæðir.⁸¹

Hvers vegna notar tónlist aðeins nokkrar tónhæðir í hvert skipti? Flest dýr nota óteljandi tónhæðir þegar þau gefa frá sér hljóð. Fuglasöngur rennur frá tóni til tóns og staldrar varla við áður en hann tekur að renna sér á næsta. Flest náttúruhljóð eru samansett úr mörgum mismunandi tónhæðum.⁸²

Ein hugsanleg skýring á þessu er tilhneiging mannsheilans til að einfalda heiminn í kringum sig. Í flestum tilvikum skilur fólk orð sem sagt er með mismunandi framburði eða mállýsku og leiðir muninn hjá sér. Þegar tónlist er spiluð skynjar fólk almennt nokkuð stórt svið af tónhæðum sem sama tón, til dæmis mið C. Flautuleikarinn lækkar hann t.d. lítið eitt meðan fiðluleikarinn hækkar hann. Báðir spila þeir svo jafnvel víbrató sem fæstir skilgreina sem marga mismunandi tóna, heldur sem ákveðinn blæ af sama tóni.⁸³

Þá er það annað sjónarmið sem segir að tónstigar séu aðferð til þess að einfalda flutning, sköpun og skrásetningu tónlistar. Tónstigar hjálpa til við að skapa

⁷⁹ Loy, 2006, bls. 48.

⁸⁰ Sama rit, bls. 48.

⁸¹ Sethares, 2005, bls. 51.

⁸² Sama rit, bls. 51.

⁸³ Sama rit, bls. 52.

tungumál sem gerir fólki hægar um vik að skiptast á tónlistarlegum hugmyndum eða hafa tónlistarleg samskipti en ef hver og einn þróaði með sér sínar hefðir um „safn“ tónhæða.⁸⁴

Hver svo sem ástæðan kann að vera, þá er tónlist almennt byggð á tónstigum⁸⁵ og í hinum vestræna heimi virðist tónstigin einn ekki hafa verið nægjanlegur, heldur myndaðist heilt kerfi utan um hann. Vestræna tónlistin varð að ferli og hefur verið rannsökuð af fræði- og vísindamönnum allt frá dögum Pýþagórasar eða í um 2500 ár.

4.5. Hugleiðingar um ávinninginn af jafnstillingunni

Athyglisvert er að ákveðnar hugmyndir virðast hafa haldist nokkuð óhagganlegar allt frá tímum Pýþagórasar. Hugmyndin um ómblíðu er ríkjandi í rökræðum um eina almenna stillingaraðferð og hún stendur jafnstillingunni fyrst um sinn fyrir þrifum. Mönnum þótti jafnstillingin of „fölsk“. Þá virðist þörfin fyrir lokað kerfi hafa myndast strax í kjölfar fimmundakerfis Pýþagórasar. Þörfin fyrir einföldun og sköpun ákveðins tungumáls sem allir gætu sæst á í grundvallaratriðum virðist hafa verið til staðar öll þessi áhrundruð.

Þá er einnig vert að hafa í huga að í dag er iðulega hlustað á tónlist í jafnri stillingu sem upprunalega var skrifuð og flutt fyrir tíma jafnstillingarinnar og þykir hún almennt hljóma rétt. Tilhneigingin til þess að fara frá frumtöntegund í forhljómstöntegund og svo aftur til baka var orðin áberandi löngu fyrir daga jafnstillingarinnar. Það má því velta fyrir sér hvort menn hafi skrifað tónlistina með einhvers konar jafnstillingu í huga þrátt fyrir að hún væri ekki enn til eða hvort þetta hafi orðið viðurkennt form vegna þess að ef farið var miklu lengra frá frumtóni var tónlistin farin að hljóma of „illa“. Það er a.m.k. ljóst að tónlist sem skrifuð var fyrir daga jafnstillingarinnar hljómar vel, eða í það minnsta ásættanlega, í jafnri stillingu. Þar vaknar spurningin hvort það sé vegna vanans eða hvort þar sé að finna einhvern grundvallarstyrkleika þessa kerfis.

Mendelsohn uppgötvaði tónverk Jóhanns Sebastians Bachs á 19. öld, en þau voru á þeim tíma svo gott sem fallin í gleysku. Bach var heldur aldrei metinn að

⁸⁴ Sama rit, bls. 52.

⁸⁵ Sama rit, bls. 52.

verðleikum í lifanda lífi og eftir að hafa skoðað sögu stillinganna er jafnvel hægt að draga svo róttæka ályktun að þar hafi stilling hans haft töluverð áhrif. Í dag er vitað að hann notaðist við stillingu þar sem allar tóntegundir hljómuðu áþekkar. Hann þróaði sína eigin stillingu og skráði hana á handrit. Hann vildi ekki láta stærðfræði ráða neinu um hana, aðeins eigin smekk.⁸⁶ Stilling hans samræmist ekki jafnstillingunni í nútímaskilningi, en hún er nær jafnstillingunni en óreglulegum stillingum 18. aldarinnar. Vel er hugsanlegt að verk hans hafi verið skrifuð með þá stillingu í huga og hafi því notið sín betur á 19. öldinni, eftir að jafnstillingin hafði rutt sér rúms, en á sínum samtíma, þegar menn voru almennt andsnúnir viðlíka stillingum.

Eftirspurnin eftir kerfi sem lét dúrtónstigann hljóma „rétt“ frá öllum tólf tónum krómátíska tónstigans virðist hafa verið grundvöllur fyrir því að „tungumálið“ vestræn tónlist gæti mótast að fullu. Það virðist því ljóst að þörfin fyrir einhvers konar jafnstillingu hafi myndast löngu áður en hún varð til. Með auknum vinsældum fjölradatónlistar myndaðist svo enn frekari þörf fyrir fleiri ómblíð tónbil en áttund og fimmund og upp úr því spratt réttstillingin sem lagði höfuðáherslu á þríhljóminn með ómblíðri þríund og fimmund. Í því tilfalli virðist þörfin fyrir tónflutning hafa vegið þyngra en ómblíðan, því sökum þess hve illa réttstillingin tónflyst náði hún ekki raunverulegri fótfestu. Hvaðan sem þörfin fyrir tónflutning kann raunverulega að vera komin má ráða af sögulega yfirlitinu að hún sé undirrót umræðunnar um stillingar á 16. öld og allt fram undir miðja 19. öld þegar jafnstillingin nær almennri viðurkenningu. Með því ruddi hún öðrum stillingaraðferðum úr vegi, fyrst og fremst vegna enharmónískra eiginleika sinna.

⁸⁶ Lehman, Bradley, „Bach’s extraordinary temperament: our Rosetta Stone – 1, *Early Music*, 33. árgangur, 1. tölublað, Oxford University Press, 2005, bls. 3.

Niðurstöður

Hefðin að byggja tónlist á tónstigum er ævafor. Eftir lauslega skoðun á sögu stillinganna er nærtækt að álykta sem svo að dúrtónstiginn hafi fyrstur orðið til með sína sjö tóna og í kjölfarið vaknað áhugi á því að hægt yrði að flytja hann á alla tóna upphaflega tónstigans. Þar með hafi skapast þörf fyrir stillingaraðferðir en menn ekki verið sammála um hvaða kostir vægju þyngst.

Hvað ágæti jafnstillingarinnar snertir, þá er nokkuð ljóst að hún þjónar vel því kerfi sem hún er sniðin að, sem er tónalckerfið. Svo virðist sem að í Evrópu hafi verið sameiginleg trú á þetta kerfi og í því fælist tungumál tónlistarinnar sbr. ummæli J. P. Rameu. Tónalckerfið þróaðist hins vegar ört á sama tíma og leitað var að „bestu“ mögulegu stillingunni.

Jafnstillingin var svo orðin almenn á svipuðum tíma og tónskáldin teygðu tónalckerfið að þolmörkum þess og í vissum skilningi má segja að líftími þess með stillingunni sem þjónaði því best hafi aðeins verið rétt rúmlega hálf öld. Á hinn bóginn er jafnvel enn athyglisverðara að jafnstillingin er enn aðalviðmið í vestrænni tónlist. Þrátt fyrir að menn skrifi tónlist sem er langt frá því að vera tónal er yfirleitt gert ráð fyrir að hún sé spiluð af hljóðfærum í jafnri stillingu. Þjálfun og menntun tónlistarmanna gegnir þar líklega veigamiklu hlutverki. Fáir þjálfar sig að ítóna í annarri stillingu en jafnstillingu og jafnvel þ ekkja fáir aðrar stillingaraðferðir. Tónlist sem hugsuð er fyrir óhefðbundnar stillingar er enn langt frá því að ná þeirri stöðu sem tónal tónlist í jafnri stillingu hefur öðlast í tímans rás. Það er þó ekkert nýtt að það tekur tíma að brjótast út úr hefðum. Jafnstillingin er þó orðin svo gömul hefð miðað við þ ann hraða og það upplýsingaflæði sem manneskjan býr við á 20. öld að merkilegt má teljast að hún hafi haldið yfirburðastöðu sinni nánast óáreitt í að minnsta kosti 150 ár.

Heimildaskrá

Ritaðar heimildir:

Barbour, James Murray, *Tuning and temperament: A historical survey*, önnur útgáfa, Dover Publications, New York, 2004.

Donahue, Thomas, *A Guide to Musical Temperament*, The Scarecrow Press, Inc., Oxford, 2005.

Dóra Hafsteinsdóttir og Sigríður Harðardóttir, *Íslenska alfræði orðabókin*, 2. bindi, 3. prentun, Reykjavík, Örn og Örlygur, 2000.

Fauvel, John, Raymond Flood og Robin Wilson, *Music and Mathematics: From Pythagoras to Fractals*, Oxford University Press, Oxford, 2003.

Lehman, Bradley, „Bach's extraordinary temperament: our Rosetta Stone – 1“, *Early Music*, 33. árgangur, 1. tölublað, Oxford University Press, 2005.

Loy, Gareth, *Musimatics: The Mathematical Foundations of Music*, I. bindi, The MIT Press, Cambridge, 2006.

Sethares, William A., *Tuning, Timbre, Spectrum, Scale*, önnur útgáfa, Springer-Verlag, London, 2005.

Heimildir af vefsíðum:

Joutsenvirta, Aarre, *The Basics of Acoustics*, 2005. Heimasíða Síbelíusarakademíunnar, 24. 2.2009, sótt 31.1.2011, <<http://www.siba.fi/fi/>>.

Hammond, Frederick og Lefferts, Peter M., „Odington, Walter [Walter Evesham; frater Walterus Otyngton monachus de Evesham]“, *Grove Music*, Oxford University Press, Oxford 2007-2011. Heimasíða Grove Music, 2007-2011, sótt 3.2.2011, <<http://www.oxfordmusiconline.com>>.

Kassel, Richard: „Partch, Harry“, *Grove Music*, Oxford University Press, 2007-2011. Heimasíða Grove Music, 2007-2011, sótt 17.1.2011 <<http://www.oxfordmusiconline.com>>.

Lindley, Mark, „Temperaments“, *Grove Music*, Oxford University Press, Oxford 2007-2011. Heimasíða Grove Music, 2007-2011, sótt 27.9.2010, <<http://www.oxfordmusiconline.com>>.

Palisca, Claude V., „Salinas, Francisco [Franciscus] de“, *Grove Music*, Oxford University Press, Oxford 2007-2011. Heimasíða Grove Music, 2007-2011, sótt 9.2.2011, <<http://www.oxfordmusiconline.com>>.

Myndir:

Fludd, Robert, *The Cosmic Monochord*. Heimasíða Middle Tennessee State University, 2011, sótt 31. janúar 2011 <<http://www.mtsu.edu/>>.

Joutsenvirta, Aarre, *The Basics of Acoustics*, 2005. Heimasíða Síbelíusarakadémiunnar, 24. 2.2009, sótt 31.1.2011. <<http://www.siba.fi/fi/>>.